1981年東大理 $\boxed{3}$

$t=0$ のとき　$Q(0,\,0)$ における C の法線は $x=0$ であり、条件より $P(0,\,0)$ である。

$0<t\leqq 1$ のとき

$Q(t,\,t^2)$ における C の法線は　$y=-\dfrac{1}{2t}(x-t)+t^2=-\dfrac{1}{2t}x+\dfrac{1}{2}+t^2$

P の x 座標を $p\,(p\leqq t)$ とすると、P と Q の距離は　$(t-p)\sqrt{1+\left(-\dfrac{1}{2t}\right)^2}=\dfrac{t-p}{2t}\sqrt{1+4t^2}=(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$

$$t-p=2t(t-t^2)=2t^2(1-t)\geqq 0 \qquad \therefore\ p=2t^3-2t^2+t\leqq t$$

P の y 座標は　$-\dfrac{1}{2t}(2t^3-2t^2+t)+\dfrac{1}{2}+t^2=-t^2+t-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+t^2=t$

これより、P は曲線 $x=2y^3-2y^2+y\,(0\leqq y\leqq 1)$ 上を動く。

$\dfrac{dx}{dy}=6y^2-4y+1=6\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}>0$ より、P の x 座標は y に関して単調増加。

$t=0,\,1$ において、C と C' は交点を持つから、求める面積は

$$1-\int_0^1 x^2dx-\int_0^1(2y^3-2y^2+y)dy$$

$$=1-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{y^4}{2}-\frac{2}{3}y^3+\frac{y^2}{2}\right]_0^1=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots(答)$$