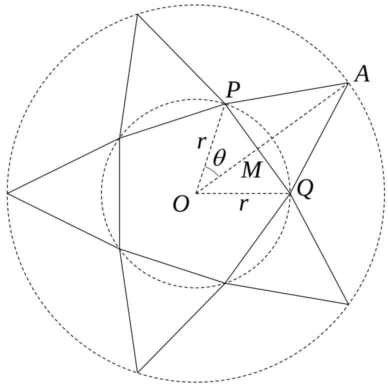
1981 年東大理 $\boxed{5}$

(1)

底面の正 n 角形が内接する円の半径を r $(0<r<1)$ とする。

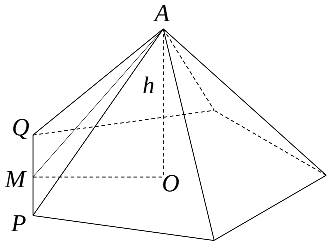


右図の展開図において、$\theta=\dfrac{\pi}{n}$ であるから

$$OM=r\cos\frac{\pi}{n},\ PQ=2r\sin\frac{\pi}{n}\qquad AM=1-OM=1-r\cos\frac{\pi}{n}$$

この展開図を組み立てたとき、正 n 角錐の高さ h は

$$\therefore h^2=AM^2-OM^2=1-2r\cos\frac{\pi}{n}>0\qquad \therefore r<\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}}\ \text{——①}$$



底面の面積 S は　$n\times r^2\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}$　体積を V とすると

$$V^2=\frac{1}{9}S^2h^2=\frac{1}{9}n^2r^4\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{n}\left(1-2r\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$x=r\cos\dfrac{\pi}{n}$ とおくと　$V^2=\dfrac{1}{9}n^2\tan^2\dfrac{\pi}{n}x^4(1-2x)$　①より　$\therefore x<\dfrac{1}{2}$

$f(x)=x^4(1-2x)$ として、$0<x<\dfrac{1}{2}$ における増減を調べる。

$$f(x)=x^4-2x^5\qquad f'(x)=4x^3-10x^4=2x^3(2-5x)$$

増減は右の通りで、$x=\dfrac{2}{5}$ のとき極大。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{5}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{16}{5^4}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{5^5}\qquad \therefore v_n=\frac{1}{3}n\tan\frac{\pi}{n}\cdot\frac{4}{25\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{375}n\tan\frac{\pi}{n}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{5}}{375}\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

$n\to\infty$ のとき、$\dfrac{\pi}{n}\to 0,\ \cos\dfrac{\pi}{n}\to 1,\ \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\to 1$ であるから　$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}v_n=\frac{4\sqrt{5}}{375}\pi$　……(答)