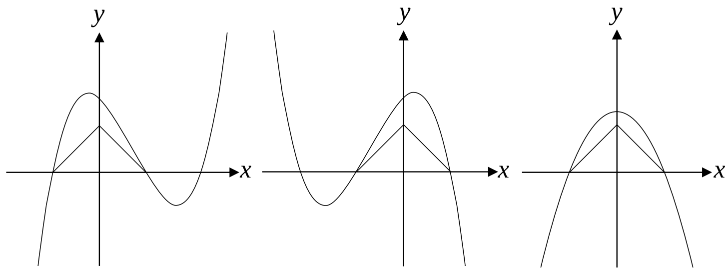
1981 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

(イ) より $f(1)=a+b+c+d=0$ (ロ) より $f(-1)=-a+b-c+d=0$ $\therefore a+c=0,\ b+d=0$

$f(x)=ax^3+bx^2-ax-b=(x+1)(x-1)(ax+b)$ とおける。 $f'(x)=3ax^2+2bx-a$



$y=f(x)$ のグラフの概形より、(ハ) を満たすには、

$f'(-1)\geqq 1,\ f'(1)\leqq -1,\ f(0)\geqq 1$

であればよい。

$f'(-1)=3a-2b-a=2a-2b\geqq 1$ $\therefore b\leqq a-\dfrac{1}{2}$

$f'(1)=3a+2b-a=2a+2b\leqq -1$ $\therefore b\leqq -a-\dfrac{1}{2}$

$f(0)=-b\geqq 1$ $\therefore b\leqq -1$

以上により $\therefore c=-a,\ d=-b,\ b\leqq a-\dfrac{1}{2},\ b\leqq -a-\dfrac{1}{2},\ b\leqq -1$ ……(答)

(2)

$$\{f'(x)-x\}^2=\{3ax^2+(2b-1)x-a\}^2=9a^2x^4+(2b-1)^2x^2+a^2+6a(2b-1)x^3-2a(2b-1)x-6a^2x^2$$

奇関数部分は除いてよいから

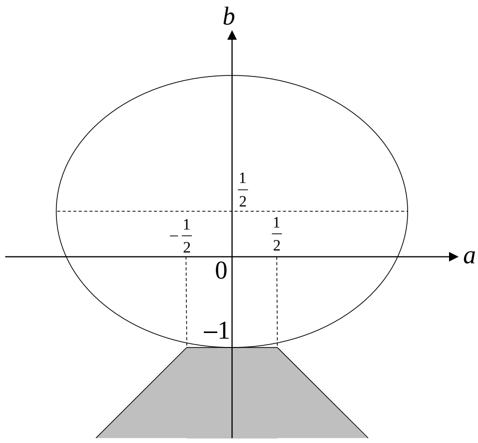
$$I=18a^2\int_0^1 x^4dx+2\left\{(2b-1)^2-6a^2\right\}\int_0^1 x^2dx+2a^2\int_0^1 dx=18a^2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1+2\left\{(2b-1)^2-6a^2\right\}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+2a^2\left[x\right]_0^1$$

$$=\frac{18}{5}a^2+\frac{2}{3}(2b-1)^2-4a^2+2a^2=8\left\{\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$\dfrac{a^2}{5}+\dfrac{1}{3}\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2=k^2\ (k>0)$ とおくと ab 平面上の楕円の方程式であり、k が最小のとき I も最小である。

(1) で求めた条件を ab 平面上に図示すると、右図の網掛け部のようになり、境界線を含む。

k が最小になるのは、右図のように楕円が直線 $b=-1$ に接するときで、このとき $a=0,\ b=-1$ である。



したがって、I を最小にする $f(x)$ は $\therefore f(x)=-x^2+1$ ……(答)

なお、k の最小値は、$\sqrt{3}k=\dfrac{3}{2}$ より $\therefore k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

I の最小値は $\therefore I=8k^2=6$