1981 年東大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

$P(x,y,z)$ とし、P から xy 平面に降ろした垂線の足を $P'(x,y,0)$ とすると、$P'P=z$ であり、

$$P'A=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2},\ P'B=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2},\ P'C=\sqrt{x^2+y^2}$$

条件により、PA, PB, PC が xy 平面となす角度は、それぞれ $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ であるから、

$$\frac{z}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}=\tan\frac{\pi}{4}=1 \quad \therefore (x-1)^2+(y-1)^2=z^2 \quad \text{——①}$$

$$\frac{z}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}=\tan\frac{\pi}{4}=1 \quad \therefore (x-1)^2+(y+1)^2=z^2 \quad \text{——②}$$

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha} \quad \therefore x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha \quad \text{——③}$$ $\alpha=0$ でも成立。

②−①より $\therefore y=0$　したがって、$z^2=(x-1)^2+1=x^2-2x+2$　③に代入して

$$x^2=(x^2-2x+2)\tan^2\alpha \quad \therefore (\tan^2\alpha-1)x^2-2x\tan^2\alpha+2\tan^2\alpha=0 \quad \text{——④}$$

$\tan\alpha=1$、すなわち $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき、④は $-2x+2=0$ となり、$\therefore x=1$　$z^2=1$ より　$\therefore z=1$　P は 1 個。

$\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$ のとき、④は x についての 2 次方程式で、$D/4=\tan^4\alpha-(\tan^2\alpha-1)\cdot 2\tan^2\alpha=\tan^2\alpha(2-\tan^2\alpha)$

$\tan\alpha>\sqrt{2}$ のとき、$D/4<0$ で、④が実数解を持たないので、P は 0 個。

$\alpha=0$ または $\tan\alpha=\sqrt{2}$ のとき、$D/4=0$ で、④は重解を持つ。

$\alpha=0$ のとき　$x^2=0$　$\therefore x=0$　$z^2=2$ より　$\therefore z=\sqrt{2}$　P は 1 個。

$\tan\alpha=\sqrt{2}$ のとき　$x^2-4x+4=(x-2)^2=0$　$\therefore x=2$　$z^2=2$ より　$\therefore z=\sqrt{2}$　P は 1 個。

$0<\tan\alpha<\sqrt{2},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$x=\frac{\tan^2\alpha\pm\tan\alpha\sqrt{2-\tan^2\alpha}}{\tan^2\alpha-1} \quad x-1=\frac{1\pm\tan\alpha\sqrt{2-\tan^2\alpha}}{\tan^2\alpha-1}$$

$$z^2=(x-1)^2+1=\frac{1\pm 2\tan\alpha\sqrt{2-\tan^2\alpha}+\tan^2\alpha(2-\tan^2\alpha)+(\tan^2\alpha-1)^2}{(\tan^2\alpha-1)^2}=\frac{2\pm 2\tan\alpha\sqrt{2-\tan^2\alpha}}{(\tan^2\alpha-1)^2}$$

$$=\left(\frac{\tan\alpha\pm\sqrt{2-\tan^2\alpha}}{\tan^2\alpha-1}\right)^2$$

$$\therefore z=\left|\frac{\tan\alpha\pm\sqrt{2-\tan^2\alpha}}{\tan^2\alpha-1}\right|$$ P は 2 個。

以上により、P の個数及び z の値は

$$
\therefore \begin{cases}
\sqrt{2} < \tan\alpha \text{のとき} & 0\text{個} & \\
\alpha = 0,\ \tan\alpha = \sqrt{2} \text{のとき} & 1\text{個} & z = \sqrt{2} \\
\alpha = \dfrac{\pi}{4} \text{のとき} & 1\text{個} & z = 1 \\
0 < \tan\alpha < \sqrt{2},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} \text{のとき} & 2\text{個} & z = \left| \dfrac{\tan\alpha \pm \sqrt{2 - \tan^2\alpha}}{\tan^2\alpha - 1} \right|
\end{cases}
\quad \cdots\cdots (\text{答})
$$