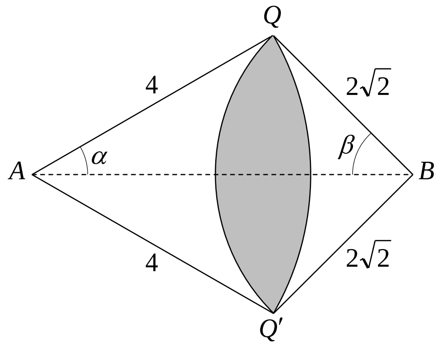
1982年東大文 $\boxed{1}$

Q の A からの最長距離は 4 であるから、Q は A を中心とした半径 4 の円の周上および内側を動く。
Q の B からの最長距離は $2\sqrt{2}$ であるから、Q は B を中心とした半径 $2\sqrt{2}$ の円の周上および内側を動く。

これより、Q の動く範囲は右図の網掛部である。
境界線を含む。



図において、$AQ:QB:AB=2:\sqrt{2}:(1+\sqrt{3})$ であるから

$$\cos\alpha=\frac{4+(4+2\sqrt{3})-2}{2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})}=\frac{3+\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\therefore\angle QAQ'=2\alpha=\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{2+(4+2\sqrt{3})-4}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\therefore\angle QBQ'=2\beta=\frac{\pi}{2}$$

求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{14}{3}\pi-4\sqrt{3}-4\quad\cdots\cdots(答)$$