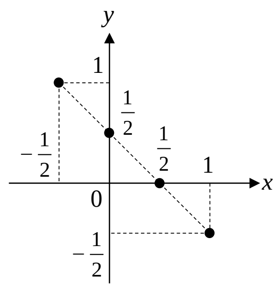
1982年東大文 $\boxed{4}$

(1)

$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$、$B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ であるから、P_1 として可能な点は　$\therefore (x_1,\ y_1)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$、$B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$、$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$、$B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ であるから、

P_2 として可能な点は　$\therefore (x_2,\ y_2)=\left(-\frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(0,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ 0\right),\ \left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$ ……(答)



図示すると右図の通り。

(2)

$x_n+y_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。$n=1,\ 2$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$x_k+y_k=\dfrac{1}{2^{k-1}}$ と仮定する。

$x_k+y_k \geqq \dfrac{1}{100}$ のとき　$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x_k-y_k)\\y_k\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_k\\\frac{1}{2}(-x_k+y_k)\end{pmatrix}$

いずれにしても　$\therefore x_{k+1}+y_{k+1}=\dfrac{1}{2}(x_k+y_k)=\dfrac{1}{2^k}$

$x_k+y_k<\dfrac{1}{100}$ のとき　$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x_k-y_k)\\y_k\end{pmatrix}$　$\therefore x_{k+1}+y_{k+1}=\dfrac{1}{2}(x_k+y_k)=\dfrac{1}{2^k}$

したがって、$n=k+1$ のときも成立。　$\therefore x_n+y_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ……(答)

(3)

$x_7+y_7=\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{1}{64}>\dfrac{1}{100}$、$x_8+y_8=\dfrac{1}{2^7}=\dfrac{1}{128}<\dfrac{1}{100}$ であるから

$n\leqq 7$ のとき　1つの $(x_n,\ y_n)$ に対し、$(x_{n+1},\ y_{n+1})$ として可能な点は2個。

$n\geqq 8$ のとき　1つの $(x_n,\ y_n)$ に対し、$(x_{n+1},\ y_{n+1})$ として可能な点は1個。

P_1 として可能な点は2個。P_2 として可能な点は4個。以下同様に、$n=8$ までは、可能な点の個数が2倍に増えていくから、P_8 として可能な点は256個。

$n\geqq 9$ では、可能な点の個数は増えないから、P_{10} として可能な点は256個 ……(答)