1982年東大理$\boxed{1}$

$P(p,q)\neq(0,0)$ に対して、$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+bq \\ cp+dq \end{pmatrix}$ が成り立ち、$\therefore \begin{cases} (a-1)p+bq=0 & \text{——①} \\ cp+(d-1)q=0 & \text{——②} \end{cases}$

①、②より　$\{(a-1)(d-1)-bc\}p=0, \{(a-1)(d-1)-bc\}q=0$　少なくとも、p,q の一方は0ではないので

　$\therefore (a-1)(d-1)=bc$ ——③

$y=rx+s$ が不動直線であるとする。このとき、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ rt+s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a+br)t+bs \\ (c+dr)t+ds \end{pmatrix}$ は $y=rx+s$ 上にあり、

　$(c+dr)t+ds=r\{(a+br)t+bs\}+s$　$\{br^2+(a-d)r-c\}t+\{br-(d-1)\}s=0$

任意の t について成立するためには、$\therefore \begin{cases} br^2+(a-d)r-c=0 & \text{——④} \\ \{br-(d-1)\}s=0 & \text{——⑤} \end{cases}$

今、原点を通らない不動直線について考えるので、$s\neq 0$ とすると、⑤より $br=d-1$ で、

i)　$b\neq 0$ のとき $r=\dfrac{d-1}{b}$　③より $c=\dfrac{(a-1)(d-1)}{b}$ であるから、

$$br^2+(a-d)r-c=\frac{(d-1)^2+(a-d)(d-1)-(a-1)(d-1)}{b}=\frac{(d-1)\{(d-1)+(a-d)-(a-1)\}}{b}=0$$

したがって、④も成立するから、$y=\dfrac{d-1}{b}x+s$ は不動直線であり、s は任意である。

ii)　$b=0$ のとき、⑤より $d=1$。このとき③も成立し、④より $(a-1)r=c$ となる。

　$a\neq 1$ であれば、$r=\dfrac{c}{a-1}$ である。$y=\dfrac{c}{a-1}x+s$ は不動直線であり、s は任意である。

　$a=1$ であれば、$c=0$、すなわち $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり、任意の r,s について $y=rx+s$ は不動直線である。

以上により、いずれにしても原点を通らない不動直線が存在する。(証明終)