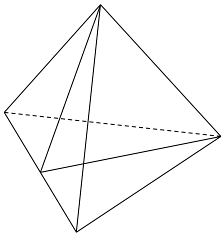
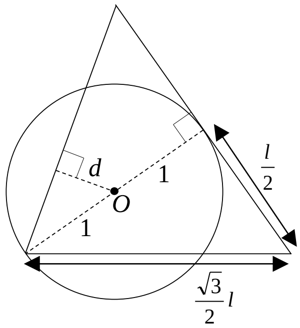
1982 年東大理 $\boxed{2}$

正四面体 T の各面による球 S の断面は、正三角形の内接円になり、
接点は各辺の中点である。
したがって、球面 S も正四面体 T の各辺の中点で接している。

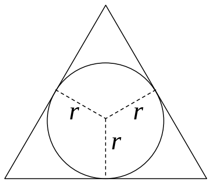
T の一辺と、その対辺の中点を通る断面を考える。
この断面は T, S の中心 O を通るので、T の一辺の長さを
l とすると、三平方の定理より





$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\frac{l}{\sqrt{2}}=2\cdot 1 \quad \therefore l=2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

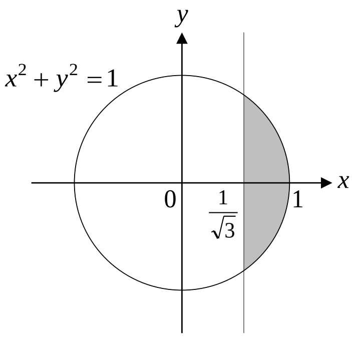
このとき、T の各面による S の断面の半径を r とすると



$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{2})^2=3\times\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot r \quad 2\sqrt{3}=3\sqrt{2}r \quad r=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

O から T の各面までの距離 d は　$\sqrt{1-r^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

これより、T の一つの面によって切り取られる S の一部の体積は、
右図の網掛部を x 軸中心に回転した立体の体積に等しく、その体積は



$$\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}(1-x^2)dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{27}\right)=\left(\frac{2}{3}-\frac{8\sqrt{3}}{27}\right)\pi$$

T の外側にあって S の内側にある部分の体積はこの 4 倍であるから

$$\therefore 4\times\left(\frac{2}{3}-\frac{8\sqrt{3}}{27}\right)\pi=\left(\frac{8}{3}-\frac{32\sqrt{3}}{27}\right)\pi \quad \cdots\cdots(\text{答})$$