1982年東大理$\boxed{4}$

$P(x, \sin x)$ のとき、P における接線の傾きは $\cos x$ で、$\vec{v}$ は $\vec{k}=(1, \cos x)$ に平行であり、$\vec{v}=q\vec{k}$ と書けて

$$\left|\vec{v}\right|^2=q^2\left|\vec{k}\right|^2=q^2(1+\cos^2 x)=V^2 \quad \therefore q=\frac{V}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad \therefore \vec{v}=\frac{V}{\sqrt{1+\cos^2 x}}(1, \cos x)$$

$$\left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right)'=\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}=-\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$$ より

$$\frac{dv_1}{dt}=-\frac{V}{1+\cos^2 x}\cdot\left(-\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\right)\cdot\frac{dx}{dt}=V\cdot\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv_2}{dt}=\frac{V}{1+\cos^2 x}\cdot\left(-\sin x\cdot\sqrt{1+\cos^2 x}+\cos x\cdot\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\right)\cdot\frac{dx}{dt}=-V\cdot\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \left|\vec{\alpha}\right|^2=\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2=V^2\left\{\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)^3}+\frac{\sin^2 x}{(1+\cos^2 x)^3}\right\}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=V^2\cdot\frac{\sin^2 x}{(1+\cos^2 x)^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

一方、$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\cos x\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2=(1+\cos^2 x)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ より、

$$\therefore \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{V^2}{1+\cos^2 x} \quad \therefore \left|\vec{\alpha}\right|^2=V^4\cdot\frac{\sin^2 x}{(1+\cos^2 x)^3}=V^4\cdot\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)^3}$$

$0 \leqq k \leqq 1$ の範囲で、関数 $f(k)=\frac{1-k}{(1+k)^3}$ の増減を考える。

$$f'(k)=\frac{-1\cdot(1+k)^3-(1-k)\cdot 3(1+k)^2}{(1+k)^6}=-\frac{(1+k)+3(1-k)}{(1+k)^4}=-\frac{4-2k}{(1+k)^4}<0 \quad (\because 0 \leqq k \leqq 1)$$

$0 \leqq k \leqq 1$ において $f(k)$ は単調減少で、$k=0$ のとき $f(k)$ は最大値1をとる。

したがって、$\left|\vec{\alpha}\right|^2$ は $\cos^2 x=0$ 、$\cos x=0$ のとき最大値 V^4 をとるから、$\left|\vec{\alpha}\right|$ の最大値は V^2 ……(答)