1982年東大理 $\boxed{6}$

(1)

回転軸は3つあり、1と6の面を通る軸が選ばれれば、1の面は上面のままなので、$\therefore p_1=\dfrac{1}{3}$ ……(答)

2と5の面を通る軸、3と4の面を通る軸が選ばれれば、1の面は必ず側面になるので、$\therefore q_1=\dfrac{2}{3}$ ……(答)

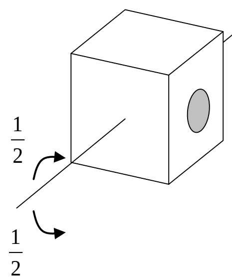
1回の操作で1の面が底面になることはないので、$\therefore r_1=0$ ……(答)

(2)

1の面が上面または底面のとき、確率$\dfrac{1}{3}$でそのままであり、確率$\dfrac{2}{3}$で側面のいずれかになる。

1の面が側面のいずれかであるとき、確率$\dfrac{1}{6}$で上面になり、確率$\dfrac{1}{6}$で底面になる。確率$\dfrac{2}{3}$で側面のいずれかのままである。

1回の操作で、上面から底面、底面から上面になることはない。



以上により、

$$\therefore\begin{cases} p_n=\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{1}{6}q_{n-1} \\ q_n=\dfrac{2}{3}p_{n-1}+\dfrac{2}{3}q_{n-1}+\dfrac{2}{3}r_{n-1} \\ r_n=\dfrac{1}{6}q_{n-1}+\dfrac{1}{3}r_{n-1} \end{cases}\quad \cdots\cdots(答)$$

(3)

$q_n=\dfrac{2}{3}(p_{n-1}+q_{n-1}+r_{n-1})=\dfrac{2}{3}$ より、q_n は一定で、$\therefore p_n=\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{1}{9},\ r_n=\dfrac{1}{3}r_{n-1}+\dfrac{1}{9}$

$$p_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{6}\right)\quad p_n-\frac{1}{6}=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$r_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(r_{n-1}-\frac{1}{6}\right)\quad r_n-\frac{1}{6}=\left(r_1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

以上により、

$$\therefore p_n=\frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\},\ q_n=\frac{2}{3},\ r_n=\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\quad \therefore p=\frac{1}{6},\ q=\frac{2}{3},\ r=\frac{1}{6}\quad \cdots\cdots(答)$$