1983年東大文 $\boxed{3}$

$P(t, t^3+at^2+bt+c)$ とすると、P における接線 l は

$$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+bt+c=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2+c$$

$x^3+ax^2+bx+c=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2+c$ とすると

$$x^3+ax^2-(3t^2+2at)x+2t^3+at^2=0 \quad (x-t)^2(x+2t+a)=0$$

したがって、Q の x 座標は $-2t-a$ 。

Q における接線 m が、Q 以外で C と交わる点を R とすれば、R の x 座標は $-2(-2t-a)-a=4t+a$ 。

ここで、

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta=\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{3}=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

これより、C と l で囲まれた部分の面積 S_l と、C と m で囲まれた部分の面積 S_m は

$$S_l=\left|\int_t^{-2t-a}(x-t)^2(x+2t+a)dx\right|=\frac{(-2t-a-t)^4}{12}=\frac{(3t+a)^4}{12}$$

$$S_m=\left|\int_{-2t-a}^{4t+a}(x+2t+a)^2(x-4t-a)dx\right|=\frac{(4t+a+2t+a)^4}{12}=\frac{(6t+2a)^4}{12}=\frac{4(3t+a)^4}{3}$$

したがって、$\dfrac{S_m}{S_l}=16$ であり、一定である。(証明終)