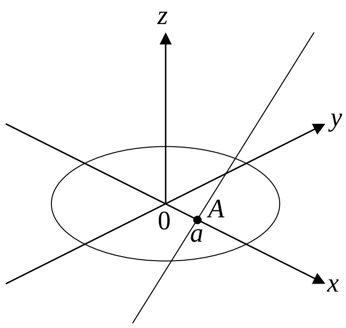
1983 年東大理 $\boxed{3}$



空間座標において、円 C を $x^2+y^2=1,\ z=0$ とする。
点 A を $(a,\ 0,\ 0)$ とする。対称性から、 $a>0$ としてよい。
このとき、直線 l 上の点は $P(a,\ t,\ t)$ と表せる。

円 C 上の点を $Q(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ とすると、2 点 $P,\ Q$ 間の距離 d は

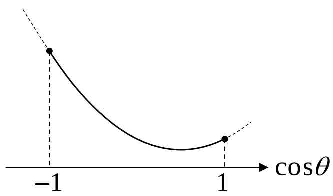
$$d^2=(a-\cos\theta)^2+(t-\sin\theta)^2+t^2=2t^2-2t\sin\theta+\sin^2\theta+(a-\cos\theta)^2$$
$$=2\left(t-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\frac{1}{2}\sin^2\theta+(a-\cos\theta)^2$$

Q を固定したとき、d^2 は $t=\dfrac{\sin\theta}{2}$ のとき最小になる。このとき

$$d^2=\frac{1}{2}\sin^2\theta+(a-\cos\theta)^2=\frac{1}{2}\cos^2\theta-2a\cos\theta+a^2+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\theta-2a)^2-a^2+\frac{1}{2}$$

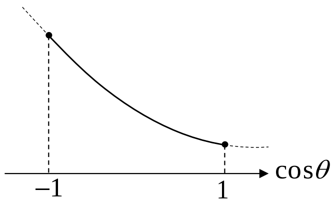
$2a<1$　　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき

d^2 は $\cos\theta=2a$ のとき、最小値 $-a^2+\dfrac{1}{2}$ をとる。



$2a\geqq1$　　$\dfrac{1}{2}\leqq a$ のとき

d^2 は $\cos\theta=1$ のとき、最小値 $a^2-2a+1=(a-1)^2$ をとる。



以上により、求める最小値は　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき $\sqrt{-a^2+\dfrac{1}{2}}$ 、$\dfrac{1}{2}\leqq a$ のとき $|a-1|$ ……(答)