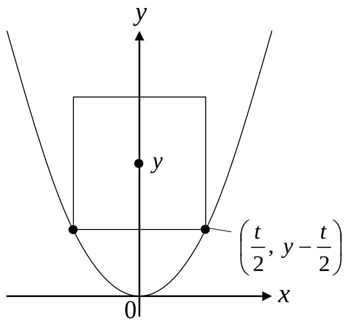
1983 年東大理 $\boxed{4}$

各辺が座標軸と平行な正方形を考える。

y が最小になるのは、下側の 2 頂点が $y=x^2$ 上にあるときで、

このときの中心の座標を $(0,\ y)$ とすると、



$$y-\frac{t}{2}=\left(\frac{t}{2}\right)^2 \quad \therefore y=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t \quad \text{——①}$$

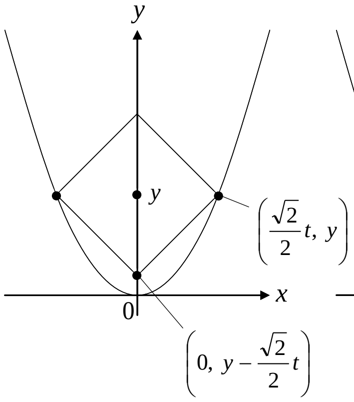
各辺が座標軸と 45° の角をなす正方形を考える。

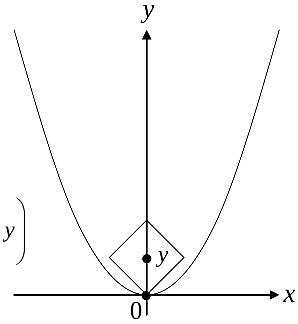
y が最小になるのは、

　i)中心と y 座標が等しい 2 点が $y=x^2$ 上にあるとき

　ii)最も下にある頂点が原点 $(0,\ 0)$ に一致するとき

のいずれかである。中心の座標を $(0,\ y)$ とすると、





最も下にある頂点の座標は $\left(0,\ y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$ であり、

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}t\geqq 0 \quad \therefore y\geqq\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\ y\right)$ が $y=x^2$ 上にあるとき、$\therefore y=\dfrac{1}{2}t^2$ 　 $\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t=\dfrac{1}{2}t(t-\sqrt{2})$ より

$0<t<\sqrt{2}$ のとき　$\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t<0$ 　$\therefore \dfrac{1}{2}t^2<\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$ 　 $\sqrt{2}\leqq t$ のとき　$\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\geqq 0$ 　$\therefore \dfrac{1}{2}t^2\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$

したがって、y の最小値は

$$\therefore \begin{cases} 0<t<\sqrt{2}\text{ のとき} & y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ \sqrt{2}\leqq t\text{ のとき} & y=\dfrac{1}{2}t^2 \end{cases} \quad \text{——②}$$

①、②より、

$0<t<\sqrt{2}$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t=\dfrac{1}{4}t\left\{t-2(\sqrt{2}-1)\right\}$ より

$0<t<2(\sqrt{2}-1)$ のとき　$\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$ 　 $2(\sqrt{2}-1)\leqq t<\sqrt{2}$ のとき　$\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$

$\sqrt{2}\leqq t$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t\right)-\dfrac{1}{2}t^2=\dfrac{1}{4}t(2-t)$ より

$\sqrt{2}\leqq t<2$ のとき　$\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t>\dfrac{1}{2}t^2$ 　 $2\leqq t$ のとき　$\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t\leqq\dfrac{1}{2}t^2$

以上まとめて、y の最小値は

$$\therefore \begin{cases} 0 < t < 2(\sqrt{2}-1),\ 2 \leqq t \text{のとき} & y = \dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{1}{2}t \\ 2(\sqrt{2}-1) \leqq t < \sqrt{2} \text{のとき} & y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ \sqrt{2} \leqq t < 2 \text{のとき} & y = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

グラフは図の通り。