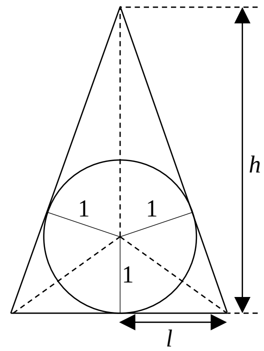
1983 年東大理 $\boxed{5}$

S を半径1に固定すると、S の表面積は 4π である。
R が最大になるのは、V の表面積が最小のときである。

V の高さを $h\ (h>2)$、底面の一辺の長さを $2l\ \ (l>1)$ とする。
V の頂点と、底面の対向する二辺の中点を通る断面を考える。
S の中心はこの断面にあり、三角形に内接していることから



$$\frac{1}{2}\cdot(2l+2\sqrt{l^2+h^2})\cdot 1=\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot h \qquad l+\sqrt{l^2+h^2}=lh \qquad \sqrt{l^2+h^2}=l(h-1)$$

$$l^2+h^2=l^2(h-1)^2=l^2(h^2-2h+1) \qquad h^2=l^2(h^2-2h) \qquad \therefore l^2=\frac{h}{h-2}$$

V の 1 つの側面は、底辺 $2l$ 、高さ $\sqrt{l^2+h^2}$ の二等辺三角形であるから

V の表面積 T は

$$T=4l^2+4\times\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot\sqrt{l^2+h^2}=4l(l+\sqrt{l^2+h^2})=4l^2h=\frac{4h^2}{h-2}$$

$f(h)=\dfrac{4h^2}{h-2}$ として、$h>2$ における増減を考える。

$$f'(h)=4\frac{2h(h-2)-h^2}{(h-2)^2}=\frac{4(h^2-4h)}{(h-2)^2}=\frac{4h(h-4)}{(h-2)^2}$$

増減は右の通りで、$h=4$ のとき極小となる。
T は $h=4$ のとき最小値32をとる。

h	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(h)$		$-$	0	$+$
$f(h)$		$\searrow$		$\nearrow$

R の最大値は　$\dfrac{4\pi}{32}=\dfrac{\pi}{8}$　$\cdots\cdots$(答)