1984 年東大文 $\boxed{1}$

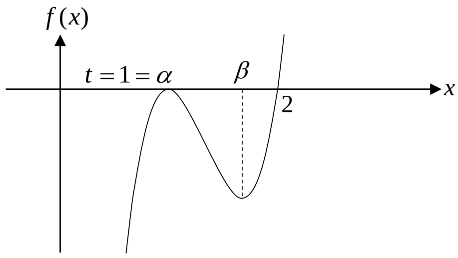
$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-t)=x^3-(t+3)x^2+(3t+2)x-2t$$
$$f'(x)=3x^2-2(t+3)x+(3t+2)$$

$f'(x)=0$ とすると　$D/4=(t+3)^2-3(3t+2)=t^2-3t+3=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

したがって、$f'(x)=0$ は相違なる 2 実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ を持つ。　$\alpha+\beta=\dfrac{2(t+3)}{3},\ \alpha\beta=\dfrac{3t+2}{3}$ ——①

以下、$g(t)=|t-\alpha|+|t-\beta|$ とする。

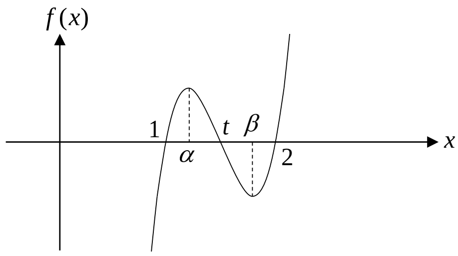
$t=1$ のとき



$f'(x)=3x^2-8x+5=(x-1)(3x-5)$ より　$\alpha=1,\ \beta=\dfrac{5}{3}$

$$g(1)=|1-1|+\left|1-\frac{5}{3}\right|=\frac{2}{3}$$

$1<t<2$ のとき

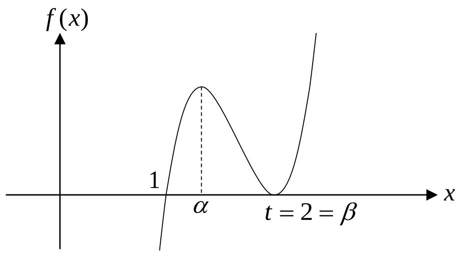


$1<\alpha<t<\beta<2$ であるから　$g(t)=(t-\alpha)+(\beta-t)=\beta-\alpha$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{4(t+3)^2-12(3t+2)}{9}=\frac{4}{9}(t^2-3t+3)$$

$$\therefore g(t)=\frac{2}{3}\sqrt{t^2-3t+3}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

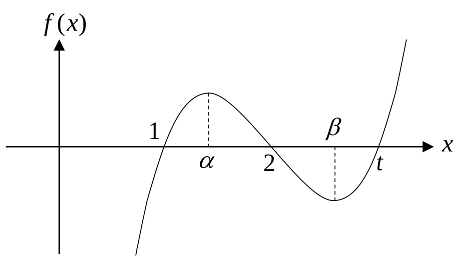
$t=2$ のとき



$f'(x)=3x^2-10x+8=(3x-4)(x-2)$ より　$\alpha=\dfrac{4}{3},\ \beta=2$

$$g(1)=\left|2-\frac{4}{3}\right|+|2-2|=\frac{2}{3}$$

$2<t$ のとき



$1<\alpha<2<\beta<t$ であるから

$$g(t)=(t-\alpha)+(t-\beta)=2t-(\alpha+\beta)=2t-\frac{2(t+3)}{3}=\frac{4}{3}t-2$$

以上により、$1\leqq t\leqq 2$ のとき $g(t)=\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$ 、$2\leqq t\leqq 3$ のとき $g(t)=\dfrac{4}{3}t-2$ で、単調増加。

$g(t)$ の最大値は $2\ (t=3)$ 、最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(t=\dfrac{3}{2}\right)$ ……(答)