1984年東大文 $\boxed{2}$

A、Bの領土に含まれない点を$P(x,y)$とする。　$y>0, x^2+(y-7)^2>4$ ——①

(2)より、PからAの領土までの最短距離は$\sqrt{x^2+(y-7)^2}-2$と書けるから

$\sqrt{x^2+(y-7)^2}-2<4$　$\sqrt{x^2+(y-7)^2}<6$　$\therefore x^2+(y-7)^2<36$ ——②

(3)より、PからBの領土までの最短距離はyであるから、

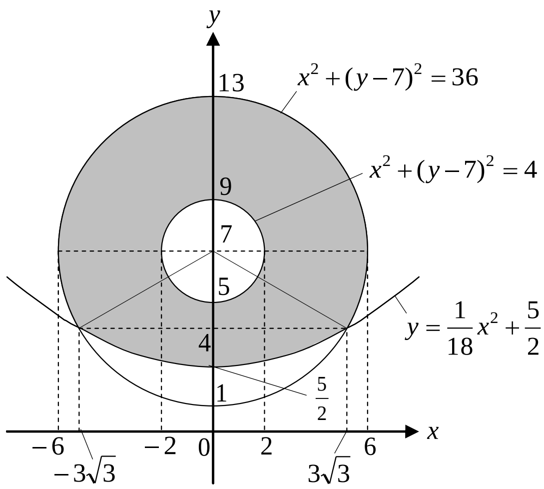
$\sqrt{x^2+(y-7)^2}-2<y$　$\sqrt{x^2+(y-7)^2}<y+2$　$x^2+y^2-14y+49<y^2+4y+4$

$18y>x^2+45$　$\therefore y>\dfrac{1}{18}x^2+\dfrac{5}{2}$ ——③

円 $x^2+(y-7)^2=36$と放物線$y=\dfrac{1}{18}x^2+\dfrac{5}{2}$の交点を求める。$x^2=18y-45$より

$18y-45+y^2-14y+49=36$　$y^2+4y-32=0$　$(y+8)(y-4)=0$　$y>0$より

$\therefore y=4$　$x^2=27$　$\therefore x=\pm 3\sqrt{3}$



①、②、③より、Aの領海は右図の通り。境界線を含まない。

ここで、2円からなるドーナツ型の面積S_1は

$S_1=36\pi-4\pi=32\pi$

円 $x^2+(y-7)^2=36$の内部かつ$y\leqq 4$である部分の面積S_2は

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot 36\cdot\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 3=12\pi-9\sqrt{3}$

直線$y=4$と放物線$y=\dfrac{1}{18}x^2+\dfrac{5}{2}$で囲まれた部分の面積$S_3$は

$$S_3=\int_{-3\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\left\{4-\left(\frac{1}{18}x^2+\frac{5}{2}\right)\right\}dx=\int_{-3\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{18}x^2\right)dx=-\frac{1}{18}\int_{-3\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})dx$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\frac{(6\sqrt{3})^3}{6}=6\sqrt{3}$$

求める面積は

$\therefore S_1-S_2+S_3=32\pi-(12\pi-9\sqrt{3})+6\sqrt{3}=20\pi+15\sqrt{3}$ ……(答)