1984年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{3}$共通

i）

xy平面上の円$C' : x^2+(y-1)^2=1$を考える。

C'上の点は$(\cos\theta,\ 1+\sin\theta,\ 0)$とおける。これを$x$軸中心に$z$軸に向かって45°回転させるとき、

x座標は変わらない。

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+\sin\theta\\ 1+\sin\theta\end{pmatrix}$より、$C$上の点$Q$は$Q\left(\cos\theta,\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt{2}},\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)$と表せる。

$\overrightarrow{PQ}=\left(\cos\theta,\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt{2}},\ \frac{-3+\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)$より、直線$PQ$上の点は$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2\sqrt{2}\end{pmatrix}+\frac{t}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\theta\\ 1+\sin\theta\\ -3+\sin\theta\end{pmatrix}$と表せて、

xy平面と交差するとき$z=0$であるから

$$2\sqrt{2}+t\frac{-3+\sin\theta}{\sqrt{2}}=0 \quad \therefore t=\frac{4}{3-\sin\theta} \quad \therefore x=\frac{4\cos\theta}{3-\sin\theta},\ y=\frac{2\sqrt{2}(1+\sin\theta)}{3-\sin\theta}$$

$$y(3-\sin\theta)=2\sqrt{2}(1+\sin\theta) \quad (y+2\sqrt{2})\sin\theta=3y-2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{3y-2\sqrt{2}}{y+2\sqrt{2}} \text{ ——①} \quad \therefore \cos\theta=\frac{x}{4}(3-\sin\theta)=\frac{x}{4}\left(3-\frac{3y-2\sqrt{2}}{y+2\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}x}{y+2\sqrt{2}} \text{ ——②}$$

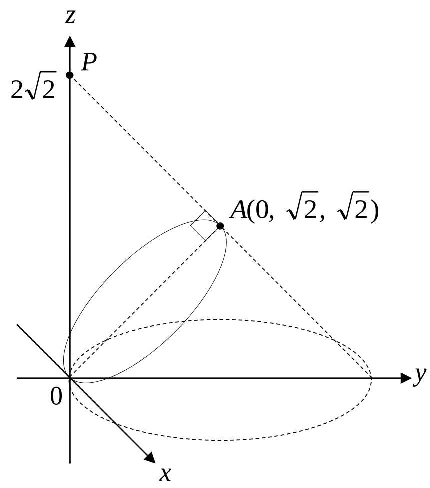
①、②を、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$に代入すると

$$(3y-2\sqrt{2})^2+8x^2=(y+2\sqrt{2})^2 \quad 8x^2+9y^2-12\sqrt{2}y+8=y^2+4\sqrt{2}y+8$$

$$8x^2+8y^2-16\sqrt{2}y=0 \quad x^2+y^2-2\sqrt{2}y=0$$

求めるSの輪郭の方程式は　$\therefore x^2+(y-\sqrt{2})^2=2$　……(答)

ii）



影Sは半径$\sqrt{2}$の円で、面積は2π。OPはSと垂直であるから、

Sを底面、Pを頂点とする錐体の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$

Cは半径1の円で、面積はπ。PAはCと垂直であるから、

Cを底面、Pを頂点とする錐体の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2=\frac{2}{3}\pi$$

求める体積は　$\therefore \frac{4\sqrt{2}-2}{3}\pi$　……(答)