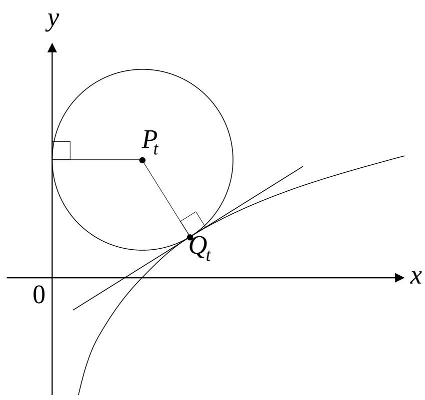
1984年東大理 $\boxed{2}$



$Q_t(t,\ \log t)$ とすると、Q_t における C の接線の傾きは $\dfrac{1}{t}$ であるから、

Q_t における C の法線は　$y=-t(x-t)+\log t=-tx+t^2+\log t$

P_t はこの法線上にあるから、$P_t(r,\ -tr+t^2+\log t)\ (0<r<t)$ とおく。

このとき、円の半径は r に等しく、$P_tQ_t=r$ であるから

$$P_tQ_t{}^2=(t-r)^2+(t^2-tr)=(1+t^2)(t-r)^2=r^2$$

$$(t-r)\sqrt{1+t^2}=r \qquad (1+\sqrt{1+t^2})r=t\sqrt{1+t^2} \qquad \therefore r=f(t)=\frac{t\sqrt{1+t^2}}{1+\sqrt{1+t^2}}$$

$$\therefore g(t)=-\frac{t^2\sqrt{1+t^2}}{1+\sqrt{1+t^2}}+t^2+\log t=-\frac{t^2\left\{\sqrt{1+t^2}-(1+t^2)\right\}}{1-(1+t^2)}+t^2+\log t=\sqrt{1+t^2}+\log t-1$$

したがって

$$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{t\sqrt{1+t^2}}{(1+\sqrt{1+t^2})(\sqrt{1+t^2}+\log t-1)}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{t}+\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}\right)\left(1+\dfrac{\log t}{\sqrt{1+t^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)}$$

$t\to 0$ のとき　$\dfrac{1}{t}\to+\infty,\ \sqrt{1+t^2}\to 1,\ \log t\to-\infty$ であるから　$\therefore \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}=0$ ……（答）

$t\to+\infty$ のとき　$\dfrac{1}{t}\to 0,\ \dfrac{\log t}{\sqrt{1+t^2}}\to 0,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\to 0$ であるから　$\therefore \displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=1$ ……（答）

（注）

念のため、$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{\sqrt{1+t^2}}=0$ の証明は以下の通り。

まず、$t>1$ において $0<\log t<\sqrt{t}$ を示す。$h(t)=\sqrt{t}-\log t$ とすると、$h'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{\sqrt{t}-2}{2t}$

t	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(t)$		−	0	＋
$h(t)$		↘		↗

$h(t)$ は $t=4$ において最小であり、$h(4)=2(1-\log 2)>0$

したがって、$h(t)>0$ であるから　$\therefore 0<\log t<\sqrt{t}$

これより $0<\dfrac{\log t}{\sqrt{1+t^2}}<\sqrt{\dfrac{t}{1+t^2}}$ であり、$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\sqrt{\frac{t}{1+t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t}+t}}=0$

はさみうちの原理より　$\therefore \displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{\sqrt{1+t^2}}=0$