1984年東大理 $\boxed{3}$

$k \geqq 2$ のとき、

$$f_k(x)=x^k-1-k(x-1)=(x-1)(x^{k-1}+\cdots+x+1-k)=(x-1)^2\left\{x^{k-2}+2x^{k-3}+\cdots+(k-1)\right\}=(x-1)^2\sum_{i=2}^{k}(i-1)x^{k-i}$$

であるから、 $f_k(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れる。

i)

$g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ とする。 $g(x)$ は $x-1$ で割り切れるので、

$$g(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_k=0 \quad \therefore a_0=-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1)=-\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$\therefore g(x)=a_n(x^n-1)+a_{n-1}(x^{n-1}-1)+\cdots+a_2(x^2-1)+a_1(x-1)=\sum_{k=2}^{n}a_k(x^k-1)+a_1(x-1)$$

$x^k-1=f_k(x)+k(x-1)$ を代入すると、

$$g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_k\left\{f_k(x)+k(x-1)\right\}+a_1(x-1)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)+(x-1)\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

したがって、 $f_k(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるので、 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるためには、

$\sum_{k=0}^{n}a_k=0,\ \sum_{k=1}^{n}ka_k=0$ 　すなわち、定数 $a_2,\cdots,a_n$ を用いて　$a_0=\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_k,\ a_1=-\sum_{k=2}^{n}ka_k$

と表されることが必要である。このとき、定数 $a_2,\cdots,a_n$ を用いて $g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$ の形に表される。

逆に、定数 $a_2,\cdots,a_n$ を用いて $g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$ の形に表されるとき、 $f_k(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるので、 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるのは明らかである。

以上により、題意は示された。（証明終）

ii)

$g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき、 $g(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商 $h(x)$ は、 $f_k(x)=(x-1)^2\sum_{i=2}^{k}(i-1)x^{k-i}$ より

$$h(x)=\sum_{k=2}^{n}a_k\left\{\sum_{i=2}^{k}(i-1)x^{k-i}\right\}$$

さらに $h(x)$ が $x-1$ で割り切れるとき、

$$h(1)=\sum_{k=2}^{n}a_k\left\{\sum_{i=2}^{k}(i-1)\right\}=\sum_{k=2}^{n}a_k\left\{\sum_{i=1}^{k-1}i\right\}=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}a_k=0$$

したがって、$g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるためには、$\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}a_k=0$ を満たす定数 $a_2,\cdots,a_n$ を用いて、$g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_k f_k(x)$ の形に表されることが必要である。

逆に、$\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}a_k=0$ を満たす定数 $a_2,\cdots,a_n$ を用いて $g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_k f_k(x)$ の形に表されるとき、$h(x)$ が $x-1$ で割り切れ、$g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れることは明らかである。

以上により、題意は示された。（証明終）