1984年東大理$\boxed{5}$文$\boxed{4}$共通

$n=1$のとき　$P_1(1)=p, P_2(1)=1-p, P_3(1)=0$

$n \geqq 2$のとき

第n世代が1個になるには、1つの個体だけを残し続けるから、$\therefore P_n(1)=p^n$
$n=1$でも成立。

$1 \leqq k \leqq n$とする。
第$k-1$世代まで1個、第k世代で2個になり、以後第n世代まで2個である確率a_kは

$$a_k=p^{k-1}\cdot(1-p)\cdot(p^2)^{n-k}=(1-p)\cdot p^{2n-1-k}$$

$$\therefore P_n(2)=\sum_{k=1}^{n}a_k=(1-p)\cdot p^{2n-1}\cdot\frac{p^{-1}(1-p^{-n})}{1-p^{-1}}=p^{2n-1}(p^{-n}-1)=p^{n-1}(1-p^n)$$

$n=1$でも成立。

$1 \leqq k \leqq n-1$とする。
第$k-1$世代まで1個、第k世代で2個になり、第n世代で3個になっている確率b_kを考える。
第k世代で分かれた2個のうち、1個は第n世代で2個になっており、もう1個は1個のままであるから、

$$b_k=p^{k-1}\cdot(1-p)\times 2P_{n-k}(1)\cdot P_{n-k}(2)=p^{k-1}\cdot(1-p)\cdot 2p^{n-k}\cdot(p^{n-k-1}-p^{2n-2k-1})$$
$$=2p^{n-1}(1-p)\left\{p^{n-1}\cdot p^{-k}-p^{2n-1}\cdot(p^2)^{-k}\right\}=2p^{2n-2}(1-p)\cdot p^{-k}-2p^{3n-2}(1-p)\cdot(p^2)^{-k}$$

$$\therefore P_n(3)=\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2p^{2n-2}(1-p)\cdot\frac{p^{-1}\left\{1-p^{-(n-1)}\right\}}{1-p^{-1}}-2p^{3n-2}(1-p)\cdot\frac{p^{-2}\left\{1-p^{-2(n-1)}\right\}}{1-p^{-2}}$$
$$=2p^{2n-2}\left\{p^{-(n-1)}-1\right\}-\frac{2p^{3n-2}}{1+p}\left\{p^{-2(n-1)}-1\right\}=2p^{2n-2}\cdot\frac{1-p^{n-1}}{p^{n-1}}-\frac{2p^{3n-2}}{1+p}\cdot\frac{1-p^{2n-2}}{p^{2n-2}}$$
$$=2p^{n-1}(1-p^{n-1})-\frac{2p^n}{1+p}\cdot(1+p^{n-1})(1-p^{n-1})=2p^{n-1}(1-p^{n-1})\left\{1-\frac{p(1+p^{n-1})}{1+p}\right\}$$
$$=\frac{2p^{n-1}(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p}$$

$n=1$でも成立。

以上より、

$$\therefore P_n(1)=p^n,\ P_n(2)=p^{n-1}(1-p^n),\ P_n(3)=\frac{2p^{n-1}(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p}\quad\cdots\cdots(答)$$