1985 年東大文 $\boxed{1}$

(1)

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2\end{pmatrix}\quad I-A=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2+b^2 & 0\\ 0 & a^2+b^2\end{pmatrix}-\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}b^2 & -ab\\ -ab & a^2\end{pmatrix}$$

$\det A=0, \det(I-A)=0$ であるから、ケーリー・ハミルトンの定理より　$A^2=A, (I-A)^2=I-A$

したがって　$A^3=A^2=A$

$$\overrightarrow{PQ}=A^3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-I\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-I\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(A-I)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}-b^2 & ab\\ ab & -a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}-b^2x+aby\\ abx-a^2y\end{pmatrix}=\frac{bx-ay}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR}=(I-A)^2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-I\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(I-A)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-I\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}-a^2 & -ab\\ -ab & -b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}-a^2x-aby\\ -abx-b^2y\end{pmatrix}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}-a\\ -b\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{PQ}\neq 0, \overrightarrow{PR}\neq 0$ であるから、$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0$ より　$\therefore \angle QPR=90°$　……(答)

(2)

$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\dfrac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \left|\overrightarrow{PR}\right|=\dfrac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるから、求める面積は

$$\therefore \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\overrightarrow{PR}\right|=\frac{|(bx-ay)(ax+by)|}{2(a^2+b^2)}\quad \cdots\cdots(答)$$