1985 年東大文 $\boxed{3}$

$$f(x)=x^n+ax+b$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{ax^2}{2}+bx\right]_{-1}^{0}=-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{a}{2}+b=-\frac{a}{2}+b+\frac{(-1)^n}{n+1}=0 \quad \text{——①}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{ax^2}{2}+bx\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{n+1}+\frac{a}{2}+b-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{a}{2}+b=2b+\frac{(-1)^n+1}{n+1}=0 \quad \text{——②}$$

②より　$\therefore b=-\frac{(-1)^n+1}{2(n+1)}$　①より　$\frac{a}{2}=-\frac{(-1)^n+1}{2(n+1)}+\frac{(-1)^n}{n+1}=\frac{(-1)^n-1}{2(n+1)}$　$\therefore a=\frac{(-1)^n-1}{n+1}$

n が奇数のとき　$a=-\frac{2}{n+1}, b=0$　n が偶数のとき　$a=0, b=-\frac{1}{n+1}$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x^n-\dfrac{2}{n+1}x & (n\text{が奇数のとき}) \\ x^n-\dfrac{1}{n+1} & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

n が奇数のとき

$$F(x)=G'(x)=\int_{-1}^{1}\left(t^n-\frac{2}{n+1}t\right)dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^2}{n+1}\right]_{-1}^{x}=\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^2}{n+1}=\frac{1}{n+1}x^2(x^{n-1}-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$G'(x)$	＋	0	－	0	－	0	＋
$G(x)$	↗		↘		↘		↗

増減は左の通り。

$x=1$ で極小、 $x=-1$ で極大となる。

$$G(1)=\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{1}(t^{n+1}-t^2)dt=\frac{2}{n+1}\int_{0}^{1}(t^{n+1}-t^2)dt=\frac{2}{n+1}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2(n-1)}{3(n+1)(n+2)}$$

$$G(-1)=0$$

n が偶数のとき

$$F(x)=G'(x)=\int_{-1}^{1}\left(t^n-\frac{1}{n+1}\right)dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t}{n+1}\right]_{-1}^{x}=\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x}{n+1}=\frac{1}{n+1}x(x^n-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$G'(x)$	－	0	＋	0	－	0	＋
$G(x)$	↘		↗		↘		↗

増減は左の通り。

$x=\pm 1$ で極小、 $x=0$ で極大となる。

$$G(1)=\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{1}(t^{n+1}-t)dt=0\ (\because t^{n+1},t\text{は奇関数})\quad G(-1)=0$$

$$G(0)=\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{0}(t^{n+1}-t)dt=\frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n}{2(n+1)(n+2)}$$

以上により、$G(x)$ は

nが奇数のとき　$x=-1$で極大値 0をとり、$x=1$で極小値 $-\dfrac{2(n-1)}{3(n+1)(n+2)}$ をとる。

nが偶数のとき　$x=0$で極大値 $\dfrac{n}{3(n+1)(n+2)}$ をとり、$x=\pm1$で極小値 0をとる。

……(答)