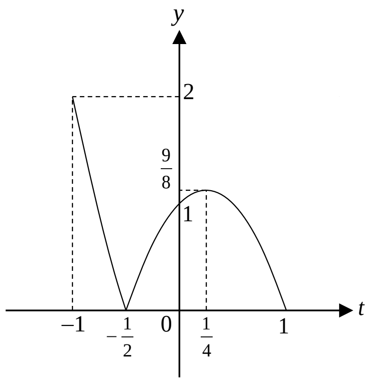
1985 年東大理 $\boxed{2}$

$OA$ から正の向きに回って $OP$ に至る角を $\theta$ とする。
$P(\cos\theta, \sin\theta), Q(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ とおけて、$0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えてよい。

$R, S$ の $x$ 座標は $\cos\theta, \cos 2\theta$ であるから　$RS = |\cos 2\theta - \cos\theta| = |2\cos^2\theta - \cos\theta - 1|$

$P, Q$ の位置の総数は、$RS = l$ を満たす実数解 $\theta$ の個数に等しい。




$f(t) = |2t^2 - t - 1| = \left|2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}\right|$ とする。$-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で

$y = f(t)$ グラフを描くと図の通り。$y = l$ との共有点を考えると

$l = 0$ のとき、共有点は 2 つで、$t = -\frac{1}{2}, 1$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ となる $\theta$ は $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ の 2 つ存在するが、

$\cos\theta = 1$ となる $\theta$ は $\theta = 0$ のみ。したがって、$P, Q$ の位置は 3 通り。

$0 < l < \frac{9}{8}$ のとき　共有点は 3 つ。いずれも $t = \cos\theta$ に対応する $\theta$ が 2 つ存在するので、$P, Q$ の位置は 6 通り。

$l = \frac{9}{8}$ のとき　共有点は 2 つ。いずれも $t = \cos\theta$ に対応する $\theta$ が 2 つ存在するので、$P, Q$ の位置は 4 通り。

$\frac{9}{8} < l < 2$ のとき　共有点は 1 つで、$t = \cos\theta$ に対応する $\theta$ が 2 つ存在するので、$P, Q$ の位置は 2 通り。

$l = 2$ のとき　共有点は $t = -1$。$\cos\theta = -1$ となる $\theta$ は $\theta = \pi$ のみであるから、$P, Q$ の位置は 1 通り。

$l > 2$ のとき　共有点は存在しない。

以上まとめて

$$\therefore \begin{cases} l = 0 \text{のとき} & 3\text{通り} \\ 0 < l < \frac{9}{8} \text{のとき} & 6\text{通り} \\ l = \frac{9}{8} \text{のとき} & 4\text{通り} \\ \frac{9}{8} < l < 2 \text{のとき} & 2\text{通り} \\ l = 2 \text{のとき} & 1\text{通り} \\ l > 2 \text{のとき} & 0\text{通り} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$