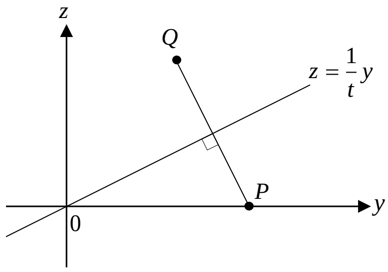
1985 年東大理 $\boxed{3}$

x 軸を含み、点 $(t,\ t,\ 1)$ を通る平面は、$z=\dfrac{1}{t}y$ で与えられる。

$Q(t,.a,\ b)$ とおくと $\overrightarrow{PQ}=(0,\ a-t,\ b)$ であり、$z=\dfrac{1}{t}y$ と直交するから



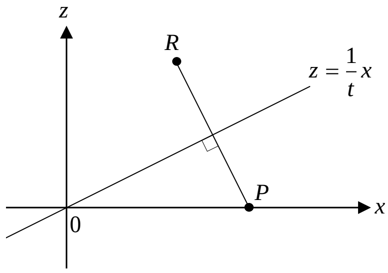
$\dfrac{b}{a-t}=-t \quad \therefore at+b=t^2$ ——①

PQ の中点が $z=\dfrac{1}{t}y$ 上にあるので $\quad \dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{a+t}{2} \quad \therefore a-bt=-t$ ——②

①、②より $\quad (t^2+1)a=t^3-t \quad \therefore a=\dfrac{t^3-t}{t^2+1} \quad \therefore b=\dfrac{a}{t}+1=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}+1=\dfrac{2t^2}{t^2+1}$

y 軸を含み、点 $(t,\ t,\ 1)$ を通る平面は、$z=\dfrac{1}{t}x$ で与えられる。

$R(c,.t,\ d)$ とおくと $\overrightarrow{PR}=(c-t,\ 0,\ d)$ であり、$z=\dfrac{1}{t}x$ と直交するから

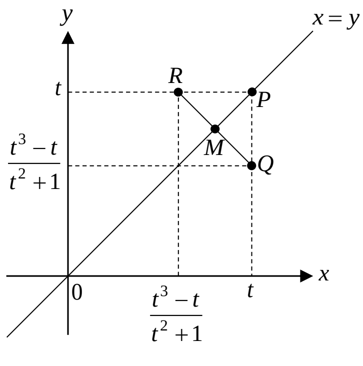


$\dfrac{d}{c-t}=-t \quad \therefore ct+d=t^2$ ——③

PR の中点が $z=\dfrac{1}{t}x$ 上にあるので $\quad \dfrac{d}{2}=\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{c+t}{2} \quad \therefore c-dt=-t$ ——④

③、④より $\quad \therefore c=\dfrac{t^3-t}{t^2+1},\ d=\dfrac{2t^2}{t^2+1}$

点 $Q,\ R$ は平面 $x=y$ に関して対称である。



QR の中点 M は $x=y$ 上にあり、z 座標は $\dfrac{2t^2}{t^2+1}$。

点 $P(t,\ t,\ 0)$ も $x=y$ 上にあり、$OP=\sqrt{2}t$ であるから、

$\triangle OPM$ の面積は $\quad \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}t\cdot\dfrac{2t^2}{t^2+1}=\dfrac{\sqrt{2}t^3}{t^2+1}$

$QR=\sqrt{2}\left(t-\dfrac{t^3-t}{t^2+1}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}$ より $\quad QM=RM=\dfrac{\sqrt{2}t}{t^2+1}$

対称性より、求める体積は $\quad 2\times\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}t^3}{t^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}t}{t^2+1}=\dfrac{4t^4}{3(t^2+1)^2}$ ……(答)