1985 年東大理 $\boxed{5}$

$X+Y=0$ となる確率は、$(X,Y)=(0,0)$ より　$p_0p_0=p_1$　$\therefore p_1={p_0}^2$

$X+Y=1$ となる確率は、$(X,Y)=(0,1),(1,0)$ より　$p_0p_1+p_1p_0=2p_2$　$\therefore p_2=p_0p_1={p_0}^3$

$X+Y=2$ となる確率は、$(X,Y)=(0,2),(1,1),(2,0)$ より

$$p_0p_2+p_1p_1+p_2p_0=3p_3 \quad \therefore p_3=\frac{1}{3}(p_0{p_0}^3+{p_0}^2{p_0}^2+{p_0}^3p_0)={p_0}^4$$

$p_n={p_0}^{n+1}$ と予想できる。$n=0,1,2,3$ で成立。

今、$0 \leqq k \leqq n$ において $p_k={p_0}^{k+1}$ が成立すると仮定する。$X+Y=n$ となる確率は

$$\sum_{k=0}^{n} p_k p_{n-k}=\sum_{k=0}^{n} {p_0}^{k+1}{p_0}^{n-k+1}=\sum_{k=0}^{n} {p_0}^{n+2}=(n+1){p_0}^{n+2}=(n+1)p_{n+1} \quad \therefore p_{n+1}={p_0}^{n+2}$$

したがって、$k=n+1$ でも成立し、$n=4,5,6,\cdots$ でも順次成立することが示された。　$\therefore p_n={p_0}^{n+1}$

ここで、$0<p_0<1$ とすると

$$\sum_{k=0}^{n} p_k=\sum_{k=0}^{n} {p_0}^{k+1}=\frac{p_0(1-{p_0}^n)}{1-p_0} \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} {p_0}^{k+1}=\frac{p_0}{1-p_0}=1 \quad p_0=1-p_0 \quad \therefore p_0=\frac{1}{2}$$

確かに $0<p_0<1$ を満たすので、$\therefore p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$　……(答)

次に、$S_n=\sum_{k=0}^{n} kp_k$ とすると

$$S_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\ n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$-)\ \frac{1}{2}S_n=\qquad 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$\therefore S_n=\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} np_n=\lim_{n\to\infty}S_n=1 \quad \text{……(答)}$$