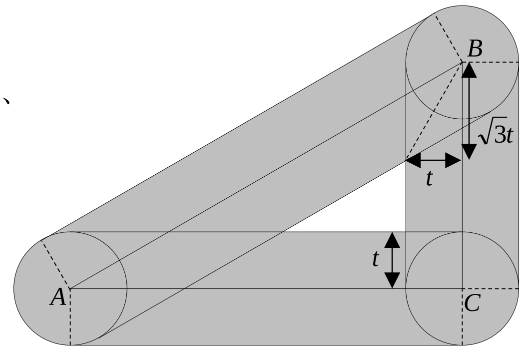
1985年東大理 $\boxed{6}$

$BC=\sqrt{12+4}=4,\ AC=\sqrt{36+12}=4\sqrt{3}$ より、 $BC:AB:AC=1:2:\sqrt{3}$ であるから、

三角形 ABC は $\angle A=\dfrac{\pi}{6},\ \angle B=\dfrac{\pi}{3},\ \angle C=\dfrac{\pi}{2}$ なる直角三角形である。

半径 $t\ (0\leqq t\leqq 1)$ の円の中心を、三角形 ABC の辺に沿って動かすと、
円が通過する部分が描く図形は右図の通り。



中心部の穴は三角形 ABC と相似であり、相似比は

$$\frac{4-t-\sqrt{3}t}{4}=1-\frac{1+\sqrt{3}}{4}t$$

網掛部の面積は

$$S(t)=\frac{1}{2}t^2\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi\right)+(8+4+4\sqrt{3})t+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}\left\{1-\left(1-\frac{1+\sqrt{3}}{4}t\right)^2\right\}$$

$$=\pi t^2+(12+4\sqrt{3})t+8\sqrt{3}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}t-\frac{2+\sqrt{3}}{8}t^2\right)$$

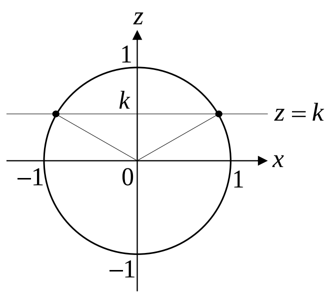
$$=(24+8\sqrt{3})t-(3+2\sqrt{3}-\pi)t^2$$

$z=0$ で切ったとき、 $t=1$ であるから、断面積は
$\therefore (24+8\sqrt{3})-(3+2\sqrt{3}-\pi)=21+6\sqrt{3}+\pi$ ……(答)

(2)

中心が xy 平面上にある半径1の球を、 $z=k\ (-1\leqq k\leqq 1)$ で切ると、断面は半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円になる。

(1)において $t=\sqrt{1-k^2}$ とすれば、求める K の体積は



$$(24+8\sqrt{3})\int_{-1}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk-(3+2\sqrt{3}-\pi)\int_{-1}^{1}(1-k^2)\,dk$$

$$=(48+16\sqrt{3})\int_{0}^{1}\sqrt{1-k^2}\,dk-(6+4\sqrt{3}-2\pi)\int_{0}^{1}(1-k^2)\,dk$$

$$=(48+16\sqrt{3})\cdot\frac{\pi}{4}-(6+4\sqrt{3}-2\pi)\left[k-\frac{k^3}{3}\right]_0^1=(12+4\sqrt{3})\pi-(6+4\sqrt{3}-2\pi)\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\left(\frac{40}{3}+4\sqrt{3}\right)\pi-4-\frac{8}{3}\sqrt{3}$$ ……(答)