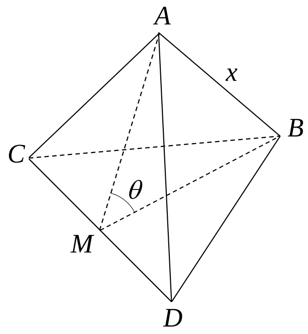
1986年東大文$\boxed{2}$



四面体Tの1つの面BCDを、底面として水平面に固定する。
頂点Aを、辺CDを軸として回転させる。

辺CDの中点をMとすると　$AM=BM=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

三角形BCDの面積は　$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{21}=2\sqrt{21}$

$\angle AMB=\theta\ (0<\theta<\pi)$とすると、頂点$A$と水平面の距離は、$\sqrt{21}\sin\theta$である。

四面体Tの体積Vは

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}\sin\theta=14\sin\theta$$

余弦定理より、$AB^2=x^2=42(1-\cos\theta)$であるから

$$\cos\theta=\frac{42-x^2}{42}\qquad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{84x^2-x^4}}{42}=\frac{x\sqrt{84-x^2}}{42}$$

$$\therefore V=14\cdot\frac{x\sqrt{84-x^2}}{42}=\frac{1}{3}x\sqrt{84-x^2}\quad\cdots\cdots(答)$$

このとき、$84-x^2>0$より　$\therefore 0<x<2\sqrt{21}$　$\cdots\cdots$(答)

$V=\frac{1}{3}\sqrt{84x^2-x^4}=\frac{1}{3}\sqrt{-(x^2-42)^2+42^2}$より、$V$の最大値は、$x=\sqrt{42}$のとき　$\therefore \frac{42}{3}=14$　$\cdots\cdots$(答)

※Vの最大値は、$\sin\theta=1$、すなわち$\theta=\frac{\pi}{2}$からもわかる。