

(1)

$$h(A) = g(f(A)) = g(A)$$

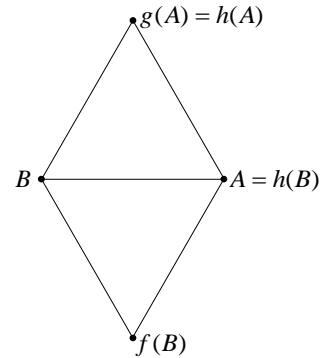
$h(A)$ は、 B を中心に、 A を正の向きに 60° 回転した点である。

$$h(B) = g(f(B))$$

B を中心に、 $f(B)$ を正の向きに 60° 回転すると、 A に一致する。

すなわち、 $h(B)$ は A に等しい。

図示すると右図の通りである。



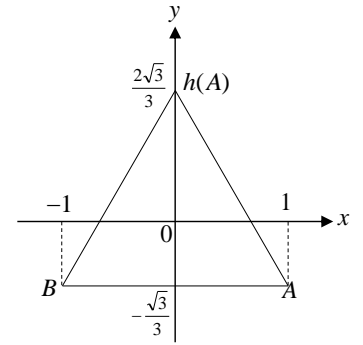
(2)

h は、正三角形 $ABh(A)$ の重心を中心とした、 120° 回転と予想できる。

今、 $O(0, 0)$, $A\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $B\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $h(A)\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ としても一般性を失わない。

$O(0, 0)$ は正三角形 $ABh(A)$ の重心である。

任意の点 $P(p, q)$ が、 h によって移る点を考える。



$$\begin{aligned} \overrightarrow{Of(P)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p-1 \\ q+\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}q - \frac{1}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}p - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}q + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - \frac{\sqrt{3}}{2}q \\ \frac{\sqrt{3}}{2}p + \frac{1}{2}q - \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Og(f(P))} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{Bf(P)} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p - \frac{\sqrt{3}}{2}q + 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}p + \frac{1}{2}q - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}p - \frac{\sqrt{3}}{4}q + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}p - \frac{\sqrt{3}}{4}q + \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}p - \frac{3}{4}q + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}p + \frac{1}{4}q - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p - \frac{\sqrt{3}}{2}q \\ \frac{\sqrt{3}}{2}p - \frac{1}{2}q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、 h によって、任意の点が O を中心として 120° 回転することが示された。

O は正三角形 $ABh(A)$ の重心で、回転角は 120° …… (答)