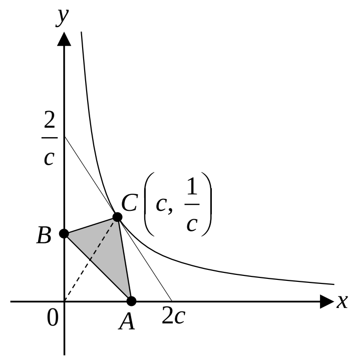
1986年東大理 $\boxed{1}$



$C\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$を固定して考える。$C$における$y=\dfrac{1}{x}$の接線$l$は

$$y=-\frac{1}{c^2}(x-c)+\frac{1}{c}=-\frac{1}{c^2}x+\frac{2}{c}=-\frac{1}{c^2}(x-2c)$$

lとx軸、y軸との交点は、それぞれ$(2c,\ 0),\left(0,\ \dfrac{2}{c}\right)$

三角形ABCがDに含まれるとき、いずれの辺も$y=\dfrac{1}{x}$と交差しない。

したがって、$0\leqq a\leqq 2c,\ 0\leqq b\leqq\dfrac{2}{c}$である。

三角形ABCの面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c-\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c}+bc-ab\right)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{a}{c}+b(c-a)\right\}$

$a=c$のとき　$S=\dfrac{1}{2}$

$a>c$のとき　$c-a<0$であるから　$S\leqq\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{a}{c}+0(c-a)\right\}=\dfrac{a}{2c}\leqq\dfrac{2c}{2c}=1$

$a<c$のとき　$c-a>0$であるから　$S\leqq\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{a}{c}+\dfrac{2}{c}(c-a)\right\}=1-\dfrac{a}{2c}\leqq 1-\dfrac{0}{2c}=1$

以上により、Sが最大になるのは$(a,\ b)=(2c,\ 0),\left(0,\ \dfrac{2}{c}\right)$のときで、最大値は1。……(答)