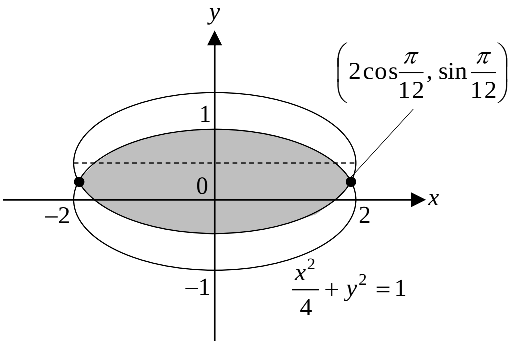
1986 年東大理 $\boxed{2}$

$\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ より

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{1-\frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\frac{1}{4}\sqrt{16-(8+2\sqrt{6}\sqrt{2})}=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

A の外形を $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$、B の外形を $\dfrac{x^2}{4}+\left(y-2\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^2=1$ とする。



A と B の交点は $\left(\pm 2\cos\dfrac{\pi}{12},\ \sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

A の外形の $y\geqq 0$ の部分は $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ である。

A の $y\geqq 0$ の部分と、$y\geqq\sin\dfrac{\pi}{12}$ の共通範囲の面積は

$$S=\frac{1}{2}\int_{-2\cos\frac{\pi}{12}}^{2\cos\frac{\pi}{12}}\sqrt{4-x^2}\,dx-4\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\int_0^{2\cos\frac{\pi}{12}}\sqrt{4-x^2}\,dx-2\sin\frac{\pi}{6}=\int_0^{2\cos\frac{\pi}{12}}\sqrt{4-x^2}\,dx-1$$

(解答 1)

ここで、$x=2\cos\theta$ とおくと　$dx=-2\sin\theta\,d\theta$　$\begin{array}{c|c} x & 0\to 2\cos\frac{\pi}{12} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{12} \end{array}$

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{12}}\sqrt{4(1-\cos^2\theta)}\cdot(-2\sin\theta)d\theta-1=4\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta-1=2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta-1$$

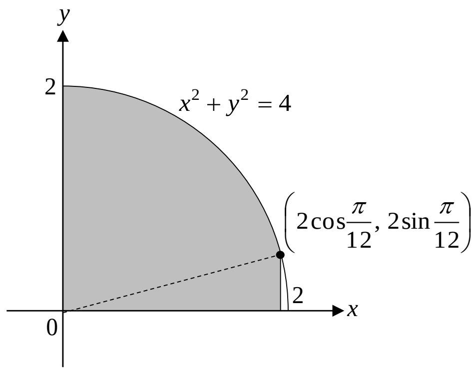
$$=2\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}}-1=2\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\right)\right\}-1=\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}$$

求める面積は　$2S=\dfrac{5}{3}\pi-1$ ……(答)

(解答 2)

$\displaystyle\int_0^{2\cos\frac{\pi}{12}}\sqrt{4-x^2}\,dx$ は、右図の網掛部の面積を表す。

これは扇型と直角三角形の面積の和になるから



$$\int_0^{2\cos\frac{\pi}{12}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\pi}{12}\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}$$
$$=\frac{5}{6}\pi+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}$$

以下、(解答 1)と同じ。