1986年東大理 $\boxed{3}$

(1)

$\overrightarrow{AB}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \overrightarrow{AC}=\left(1,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ より　$4\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,\ 2,\ -2)$

$\overrightarrow{n_0}=(t,\ 2t,\ -2t)$ とおけるから　$\left|\overrightarrow{n_0}\right|^2=9t^2=1$　$t^2=\frac{1}{9}$　$\therefore t=\pm\frac{1}{3}$

したがって　$\therefore \overrightarrow{n_0}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ……(答)

(2)

$\overrightarrow{n_0}$ を l を軸として回転させたベクトルを、$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\overrightarrow{DE}=(-1,\ 1,\ 0)$ で、l と $\vec{n}$ がなす角は一定であるから、内積 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}$ が一定である。

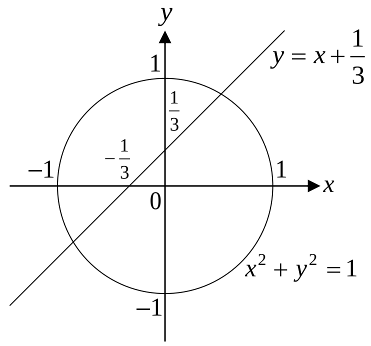
対称性から、$\overrightarrow{n_0}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ について考える。$\overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=y-x=\frac{1}{3}$ ——①

$|\vec{n}|=1$ より　$x^2+y^2+z^2=1$ ——②

空間座標系において、①は平面、②は球面を表す。

xy 平面による断面を考えると、①は直線 $y-x=\frac{1}{3}$、②は円 $x^2+y^2=1$ であるから

$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=1$　$9y^2-3y-4=0$　$\therefore y=\frac{3\pm\sqrt{153}}{18}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$



右図より、$\frac{1-\sqrt{17}}{6}\leqq y\leqq\frac{1+\sqrt{17}}{6}$ であるから

$|y|$ の最大値は $\frac{1+\sqrt{17}}{6}$、最小値は 0 ……(答)