1986 年東大理 $\boxed{5}$　※(1) を修正しました。

(1)

2 人が同じベンチに座っているとき、それまでの A と B の移動回数の和は k 回である。

したがって、$n<k$ のとき　$\therefore q=0$

$n=k$ のとき　引き分けが一度もないことが条件であるから　$\therefore q=\left(\frac{2}{3}\right)^k$

$n>k$ のとき

n 回じゃんけんをしたとき、A の勝ち、負け、引き分けのパターンは 3^n 通り。

A の勝ち、負け、引き分けを、それぞれ○、×、△で表す。

i)　n 回じゃんけんをして、k 回は A か B のどちらかが勝ち、$n-k$ 回は引き分けであり、なおかつ A も B も少なくとも 1 勝以上するとき

合計 k 個の○か×と、$n-k$ 個の△を、少なくとも○も×も 1 個以上使って横一列に並べる並べ方の総数を、3^n で割ったものが i) の場合の確率であり、$\frac{(2^k-2)_nC_k}{3^n}$ となる。

ii)　n 回じゃんけんをして、A か B のどちらかが負けなしで k 勝し、$n-k$ 回は引き分けであるとき

$n-1$ 回以内に A か B のどちらかが負けなしで k 勝すれば、n 回じゃんけんをする前にゲームの勝敗が決まる。

したがって、n 回じゃんけんが行われるためには、$n-1$ 回までに $n-k$ 回引き分けなければならない。

このような確率は、$2\times\frac{{}_{n-1}C_{k-1}}{3^n}=\frac{2k\cdot{}_nC_k}{3^n\cdot n}$ となる。

$$\therefore q=\frac{(2^k-2)_nC_k}{3^n}+\frac{2k\cdot{}_nC_k}{3^n\cdot n}=\frac{2{}_nC_k}{3^n}\left(2^{k-1}-1+\frac{k}{n}\right)$$

これは $n=k$ の場合と一致する。

以上により　$\therefore q=\begin{cases}0 & (n<k)\\ \frac{2{}_nC_k}{3^n}\left(2^{k-1}-1+\frac{k}{n}\right) & (n\geqq k)\end{cases}$　……(答)

(2)

(1) と同様に、A の勝ち、負け、引き分けを、それぞれ○、×、△で表すとき、求める確率は、x 個の○、y 個の×、$n-x-y$ 個の△を横一列に並べる並べ方の総数を、3^n で割ったものに等しい。

ただし、$x+y\leqq n, x\leqq k, y\leqq k$ ――①

①の条件下で、x 個の○、y 個の×、$n-x-y$ 個の△を横一列に並べる並べ方は、まず n 箇所中の x 箇所を選んで○を並べ、次に $n-x$ 箇所中の y 箇所を選んで×を並べ、残った $n-x-y$ 箇所に△を並べればよいから、

$${}_nC_x\times{}_{n-x}C_y=\frac{n!}{(n-x)!x!}\cdot\frac{(n-x)!}{(n-x-y)!y!}=\frac{n!}{(n-x-y)!x!y!}$$

したがって、求める確率は

$$\therefore p(x,y)=\begin{cases}0 & (x+y>n\text{ または }x>k\text{ または }y>k)\\ \frac{n!}{(n-x-y)!x!y!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n & (x+y\leqq n\text{ かつ }x\leqq k\text{ かつ }y\leqq k)\end{cases}\quad\text{……(答)}$$

(3)

$n=3$ のとき、勝敗が決まるのは A か B の 3 連勝であるから、 $p=1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{25}{27}$

$n\geqq 4$ のとき、(2) において $x\leqq 2$ かつ $y\leqq 2$ であるから、

$$p=p(0,0)+p(1,0)+p(0,1)+p(2,0)+p(1,1)+p(0,2)+p(2,1)+p(1,2)+p(2,2)$$

$$=\left\{1+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!2!}+\frac{n!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-2)!2!}+\frac{n!}{(n-3)!2!}+\frac{n!}{(n-3)!2!}+\frac{n!}{(n-4)!2!2!}\right\}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\left\{1+n+n+\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\right\}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\left\{1+2n+2n(n-1)+n(n-1)(n-2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\right\}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{4}\left\{4+8n+4n^2(n-1)+(n^2-3n)(n^2-3n+2)\right\}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}(n^4-2n^3+7n^2+2n+4)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$n=3$ のとき、

$$\frac{1}{4}(3^4-2\cdot 3^3+7\cdot 3^2+2\cdot 3+4)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{4}(81-54+63+6+4)\cdot\frac{1}{27}=\frac{100}{4}\cdot\frac{1}{27}=\frac{25}{27}$$

であるから、 $n=3$ でも成立。

$$\therefore p=\frac{1}{4}(n^4-2n^3+7n^2+2n+4)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots\cdots(答)$$