1987年東大文$\boxed{1}$

$$X^2-4X+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&z\\z&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&z\\z&y\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}x&z\\z&y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+z^2&z(x+y)\\z(x+y)&y^2+z^2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}x&z\\z&y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x^2-4x+3+z^2&z(x+y-4)\\z(x+y-4)&y^2-4y+3+z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

これより　$\therefore\begin{cases}x^2-4x+3+z^2=0 & \text{——①}\\ y^2-4y+3+z^2=0 & \text{——②}\\ z(x+y-4)=0 & \text{——③}\end{cases}$　③より、$z=0$ または $x+y-4=0$ で、

$z=0$ のとき

①より　$x^2-4x+3=0$　$(x-1)(x-3)=0$　$\therefore x=1,3$

②より　$y^2-4y+3=0$　$(y-1)(y-3)=0$　$\therefore y=1,3$

したがって　$\therefore (x,y)=(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)$ ——④

$x+y-4=0$ のとき

①より　$(x-2)^2+z^2=1$　$z^2=1-(x-2)^2\geqq 0$　$\therefore (x-2)^2\leqq 1$　$\therefore 1\leqq x\leqq 3$

②より　$(y-2)^2+z^2=1$　$z^2=1-(y-2)^2\geqq 0$　$\therefore (y-2)^2\leqq 1$　$\therefore 1\leqq y\leqq 3$

したがって　$\therefore x+y=4,\ 1\leqq x\leqq 3$ ——⑤

(x,y) の存在範囲は④または⑤であり、図の通り。