1987 年東大文 $\boxed{2}$

$$f(x)=x^3-ax^2-a^2x$$
$$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a)$$

$f(x)$ の増減は右の通りで、$x=-\dfrac{a}{3}$ のとき極大となる。

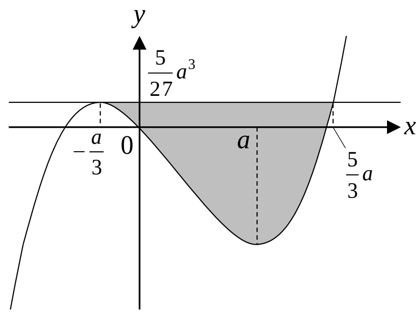
x	$\cdots$	$-\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(-\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+\frac{a^3}{3}=\frac{5}{27}a^3$$

$x=b=-\dfrac{a}{3}$ における接線は　$y=\dfrac{5}{27}a^3$

また、$x^3-ax^2-a^2x=\dfrac{5}{27}a^3$ とすると　$\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2\left(x-\dfrac{5}{3}a\right)=0$

$f(x)$ と $y=\dfrac{5}{27}a^3$ の、接点以外の交点の x 座標は　$x=\dfrac{5}{3}a$



求める面積は　$S=\displaystyle\int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{5}{3}a}\left\{\frac{5}{27}a^3-(x^3-ax^2-a^2x)\right\}dx=-\int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{5}{3}a}\left(x+\frac{a}{3}\right)^2\left(x-\frac{5}{3}a\right)dx$

ここで

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx=\int_\alpha^\beta\left\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right\}dx$$
$$=\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta=\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{3}=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$

$$\therefore S=\frac{1}{12}\left(\frac{5}{3}a+\frac{a}{3}\right)^4=\frac{(2a)^4}{12}=\frac{4}{3}a^4 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$