

1987 年東大理 1

$y=2x+1$  上の点を  $(t, 2t+1)$  とすると、 $A$  による一次変換で移る点は

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at-b(2t+1) \\ bt+a(2t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-2b)t-b \\ (2a+b)t+a \end{pmatrix}$$

これが  $y=-3x-1$  上の点であるとき

$$(2a+b)t+a=-3(a-2b)t+3b-1 \quad 5(a-b)t+a-3b+1=0 \quad \text{---①}$$

①が任意の  $t$  について成り立つには  $a-b=0, a-3b+1=0 \quad \therefore a=b=\frac{1}{2}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$
 であるから、 $A$  による一次変換は、

大きさ  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  倍と原点中心の  $\frac{\pi}{4}$  回転の合成変換である。

したがって、 $OP$  と  $OQ$  のなす角の大きさは  $\therefore \frac{\pi}{4}$  …… (答)