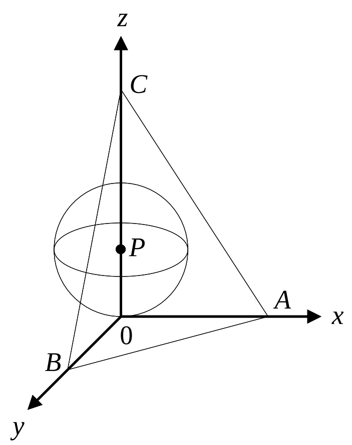
1987 年東大理 $\boxed{3}$



球面 K の方程式は $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ であるから

$$a^2+b^2+(c-1)^2=1 \ (0<a<1, 0<b<1, 1<c<2) \quad \text{——①}$$

$\overrightarrow{PQ}=(a,b,c-1)$ であるから、平面 L の方程式は

$$a(x-a)+b(y-b)+(c-1)(z-c)$$
$$=ax+by+(c-1)x-\left\{a^2+b^2+(c-1)^2\right\}-(c-1)=0$$

①より　$\therefore ax+by+(c-1)z=c$ ——②

②より、A, B, C の座標はそれぞれ $\left(\dfrac{c}{a},0,0\right), \left(0,\dfrac{c}{b},0\right), \left(0,0,\dfrac{c}{c-1}\right)$ である。

四面体 $OABC$ の体積は　$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{c}{b}\times\dfrac{c}{c-1}=\dfrac{c^3}{6ab(c-1)}$ ——③

一方、平面 L と原点 $O(0,0,0)$ の距離 d は、①、②より $d=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+(c-1)^2}}=c$ であるから、

三角形 ABC の面積を S とすると、$V=\dfrac{1}{3}Sc$ と表せるので、③より　$\therefore S=\dfrac{c^2}{2ab(c-1)}$

c を固定して考えると、S が最小になるのは、ab が最大のときである。
$a^2+b^2=1-(c-1)^2=c(2-c)$ の条件下で、ab の最大値を求める。

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=c(2-c)$　$(a+b)^2=2ab+c(2-c)$　$a+b>0$ より　$\therefore a+b=\sqrt{2ab+c(2-c)}$

$ab=k$ とおくと、a,b は 2 次方程式 $x^2-\sqrt{2k+c(2-c)}\,x+k=0$ の 2 解である。実数解を持つ条件より

$D=2k+c(2-c)-4k=c(2-c)-2k\geqq 0$　$\therefore k\leqq\dfrac{c(2-c)}{2}$　$k=\dfrac{c(2-c)}{2}$ のとき、$a=b=\sqrt{\dfrac{c(2-c)}{2}}$

$\dfrac{c(2-c)}{2}=-\dfrac{(c-1)^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ で、$1<c<2$ より　$0<\dfrac{c(2-c)}{2}<\dfrac{1}{2}$　したがって、$0<a<1, 0<b<1$ を満たす。

$a=b=\sqrt{\dfrac{c(2-c)}{2}}$ のとき　$S=\dfrac{c^2}{c(2-c)(c-1)}=\dfrac{c}{(2-c)(c-1)}$　$f(c)=\dfrac{c}{(2-c)(c-1)}$ $(1<c<2)$ とすると

$$f'(c)=\frac{1\cdot(-2+3c-c^2)-c(3-2c)}{(2-c)^2(c-1)^2}=\frac{c^2-2}{(2-c)^2(c-1)^2}$$

c	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(c)$ は $c=\sqrt{2}$ のとき最小で、$f(\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}-1)^2}=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$

以上により、三角形 ABC の面積の最小値は $3+2\sqrt{2}$ ……(答)

このとき、$a=b=\sqrt{\sqrt{2}-1}, c=\sqrt{2}$ である。