1987年東大理 $\boxed{4}$

$P(0,\ p,\ 1-p^2)$ とする。$\overrightarrow{AP}=(-1,\ p,\ -p^2)$ であるから、直線 AP 上の点は

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\p\\-p^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\pt\\1-p^2t\end{pmatrix} \quad \text{——①}$$

$x=1-t$ とすると　$t=1-x$　①に代入すると $\begin{pmatrix}x\\p(1-x)\\1-p^2(1-x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\p-px\\1-p^2+p^2x\end{pmatrix}$

直線 AP と、平面 $x=k\ (0\leqq k\leqq 1)$ との交点は、$(k,\ p-pk,\ 1-p^2+p^2k)$ であるから
この交点と x 軸との距離は

$$\sqrt{(p-pk)^2+(1-p^2+p^2k)^2}=\sqrt{p^2-2p^2k+p^2k^2+(1-p^2)^2+2(1-p^2)p^2k+p^4k^2}$$
$$=\sqrt{1-p^2+p^4-2p^4k+(p^2+p^4)k^2}$$

この立体の、平面 $x=k$ による断面は、半径 $\sqrt{1-p^2+p^4-2p^4k+(p^2+p^4)k^2}$ の円であるから

$$\therefore V=\pi\int_0^1\left\{1-p^2+p^4-2p^4k+(p^2+p^4)k^2\right\}dk=\pi\left[(1-p^2+p^4)k-p^4k^2+(p^2+p^4)\frac{k^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\pi\left(1-p^2+p^4-p^4+\frac{p^2+p^4}{3}\right)=\pi\left(\frac{1}{3}p^4-\frac{2}{3}p^2+1\right) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$V=\pi\left(\frac{1}{3}p^4-\frac{2}{3}p^2+1\right)=\pi\left\{\frac{1}{3}(p^2-1)^2+\frac{2}{3}\right\}$ より、最小値は　$\therefore \frac{2}{3}\pi$　……(答)