1987年東大理$\boxed{5}$

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j)^2-\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2=\sum_{j=1}^{n}\left\{(x_j{}^2-2x_jz_j+z_j{}^2)-(x_j{}^2-2x_jy_j+y_j{}^2)\right\}=2\sum_{j=1}^{n}x_j(y_j-z_j)$$

$$\left(\because \sum_{j=1}^{n}z_j{}^2=\sum_{j=1}^{n}y_j{}^2\right)$$

$S_n=\sum_{j=1}^{n}x_j(y_j-z_j)$ とおき、$S_n\geqq 0$ を示す。

$n=2$ のとき　$x_1\geqq x_2, y_1\geqq y_2$ であり、$z_1=y_1, z_2=y_2$ のとき、$S_2=0$
$z_1=y_2, z_2=y_1$ のとき　$S_2=x_1(y_1-y_2)+x_2(y_2-y_1)=(x_1-x_2)(y_1-y_2)\geqq 0$　したがって $S_2\geqq 0$ が成立。

$n=k$ のとき　$x_1\geqq x_2\geqq\cdots\geqq x_k,\ y_1\geqq y_2\cdots\geqq y_k$ であり、数列 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_k$ を並べ替えて得られるどのような数列 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_k$ に対しても $S_k\geqq 0$ が成立すると仮定する。

数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ に $x_k\geqq x_{k+1}$ であるような x_{k+1} を追加し、数列 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_k$ に $y_k\geqq y_{k+1}$ であるような y_{k+1} を追加する。数列 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_k,\ y_{k+1}$ を並べ替えた数列 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_k,\ z_{k+1}$ を考える。
$z_{k+1}=y_{k+1}$ のとき　$S_{k+1}=S_k+x_{k+1}(y_{k+1}-y_{k+1})=S_k\geqq 0$

次に、$z_{k+1}=y_{k+1}$ の状態から、$z_i\ (1\leqq i\leqq k)$ と z_{k+1} を入れ替える。このとき、

$$\begin{aligned}
S_{k+1}&=\sum_{j=1}^{i-1}x_j(y_j-z_j)+\sum_{j=i+1}^{k}x_j(y_j-z_j)+x_i(y_i-y_{k+1})+x_{k+1}(y_{k+1}-z_i)\\
&=\sum_{j=1}^{i-1}x_j(y_j-z_j)+\sum_{j=i+1}^{k}x_j(y_j-z_j)+x_i(y_i-z_i)+x_i(z_i-y_{k+1})+x_{k+1}(y_{k+1}-z_i)\\
&=\sum_{j=1}^{k}x_j(y_j-z_j)+(x_i-x_{k+1})(z_i-y_{k+1})\\
&=S_k+(x_i-x_{k+1})(z_i-y_{k+1})\geqq S_k\geqq 0\quad(\because x_i\geqq x_{k+1},\ z_i\geqq y_{k+1})
\end{aligned}$$

したがって、$z_{k+1}=y_{k+1}$ の状態から、どのように $z_i\ (1\leqq i\leqq k)$ と z_{k+1} を入れ替えても $S_{k+1}\geqq 0$ となるので、
仮定は $n=k+1$ でも成立。

以上により示された。(証明終)