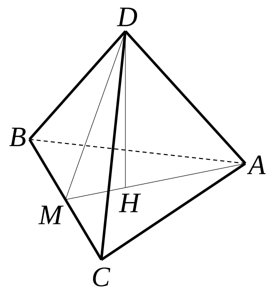
1988 年東大理$\boxed{2}$

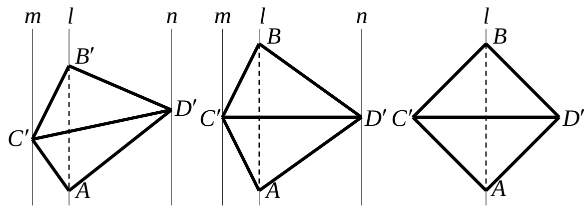


まず、1 辺の長さが 1 の正四面体の高さを求めておく。
1 つの頂点Dから正三角形ABCに下ろした垂線の足をH、辺BCの中点をMとすると、HはAM上にあり、$AH:HM=2:1$であるから

$$DM=AM=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad HM=\frac{1}{3}AM=\frac{\sqrt{3}}{6}\quad DH^2=DM^2-HM^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}\quad \therefore DH=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

正四面体の 1 つの頂点Aを平面α上に固定しても、一般性を失わない。
他の頂点B, C, Dのα上への正射影をB', C', D'とする。

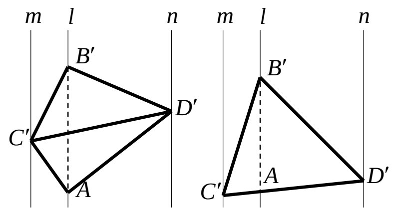
i) Vのα上への正射影が四角形であるとき
AとB'を結ぶ直線をlとし、C', D'を通り、lに平行な直線をそれぞれm, nとする。
Aを固定し、B'がl上を動くように正四面体を動かすと、C'はm上を、D'はn上を動く。
Bをαに近づけると、AB'は大きくなり、Sも大きくなる。



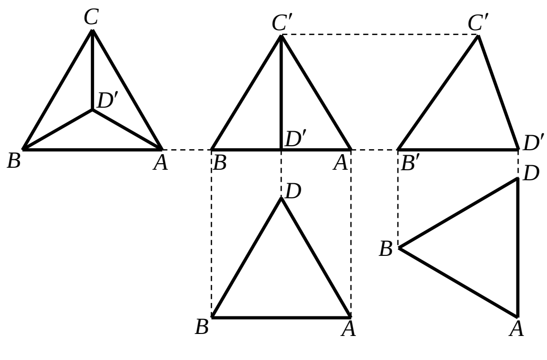
Bが平面α上に達したとき、$AB\perp C'D'$より　$S=\frac{1}{2}C'D'$

ABをα上に固定してVを動かすと、$C'D'$はαに平行なとき最大になり、$C'D'=CD=1$よりSの最大値は　$\therefore S=\frac{1}{2}$

一方、Bをαから離すと、AB'は小さくなり、Sも小さくなる。
やがてAが$C'D'$に重なり、正射影は三角形になる。
したがって、Vの正射影が四角形のとき、それより面積が小さい三角形のVの正射影が、必ず存在することがわかる。



ii) Vのα上への正射影が三角形であるとき
Sが最大になるのは正射影が正三角形であるとき、すなわち
Vの 1 つの面がαに平行であるときで　$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{1}{2}$



Vの 1 つの面ABCがα上に接しているとする。
ABをα上に固定し、D'がAB上に重なるまでVを動かす。
このとき面ABDはαに垂直であり、$C'D'=\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$
さらにAをα上に固定し、D'がAB'上を動くようにVを動かす。
D'がAと重なったとき、DAはαに垂直であり、$B'D'=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$　Sの最小値は　$\therefore S=\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

以上により、Sの最大値は$\frac{1}{2}$、最小値は$\frac{\sqrt{2}}{4}$　……(答)

※2013 年早稲田大理工$\boxed{\text{V}}$(3)でほぼ同じ出題あり。ただし、最大値のみが問われた。