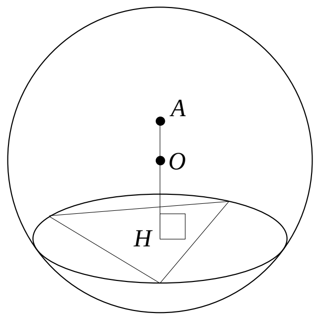
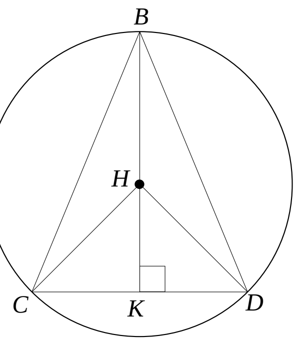
1988年東大理 $\boxed{6}$

(1)



B, C, D は、O を中心とした半径4の球面上にある。
今、B, C, D を通る平面 α を考え、α を水平面として固定する。
O から α に下ろした垂線の足を H をとし、$OH = h$ とする。
$\triangle BCD$ および h が固定されているとき、四面体 $ABCD$ の体積が最大になるのは、A が α から最も遠いときである。
すなわち、A が HO の延長線上にあるときであるのは明らかである。



次に、$\triangle BCD$ の面積の最大値を考える。

α による切り口に現れる円の半径は $r = \sqrt{16 - h^2}$ である。

弦 CD を固定し、H から CD に下ろした垂線の足を K とする。
$\triangle BCD$ の面積が最大になるのは、B が直線 CD から最も遠いときである。
すなわち、B が KH の延長線上にあるときであるのは明らかである。

$HK = l\,(0 \leqq l < r)$ とすると $CD = 2\sqrt{r^2 - l^2}$ であり、$\triangle BCD$ の面積は　$S(l) = (r + l)\sqrt{r^2 - l^2}$

$f(l) = \left\{S(l)\right\}^2 = (r+l)^2(r^2 - l^2) = (r+l)^3(r-l)$ とすると

$$f'(l) = 3(r+l)^2(r-l) - (r+l)^3 = (r+l)^2\left\{3(r-l) - (r+l)\right\} = 2(r+l)^2(r-2l)$$

増減は右の通りで、$f(l)$ は $l = \dfrac{r}{2}$ のとき最大。

l	0	$\cdots$	$\frac{r}{2}$	$\cdots$	r
$f'(l)$		$+$	0	$-$	
$f(l)$		↗		↘	

$f\left(\dfrac{r}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}r\right)^3 \cdot \dfrac{r}{2} = \dfrac{27}{16}r^4$ より、$S(l)$ の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$。
このとき $HK : HC : KC = 1 : 2 : \sqrt{3}$ で、$\triangle BCD$ は正三角形である。

以上により、h を固定したときの四面体 $ABCD$ の体積の最大値 $V(h)$ は

$$V(h) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2(h+1) = \frac{\sqrt{3}}{4}(h+1)(16 - h^2)$$

$0 \leqq h < 4$ における $V(h)$ の最大値を求める。

$$\frac{4}{\sqrt{3}}V'(h) = (16 - h^2) - 2h(h+1) = 16 - 2h - 3h^2 = (8+3h)(2-h)$$

増減は右の通りで、$V(h)$ は $h = 2$ のとき最大。

h	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		↗		↘	

求める四面体 $ABCD$ の体積の最大値は　$\therefore V(2) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3 \cdot 12 = 9\sqrt{3}$　……(答)