1989 年東大文 $\boxed{2}$

(1)

C_1 上の点 $\left(t,\ t^2+\dfrac{1}{a^2}\right)$ における接線の式は　$y=2t(x-t)+t^2+\dfrac{1}{a^2}=2tx-t^2+\dfrac{1}{a^2}$ ——①

①が C_2 にも接するとき

$$-(x-a)^2=2tx-t^2+\frac{1}{a^2} \qquad x^2+2(t-a)x-t^2+a^2+\frac{1}{a^2}=0 \text{ ——②}$$

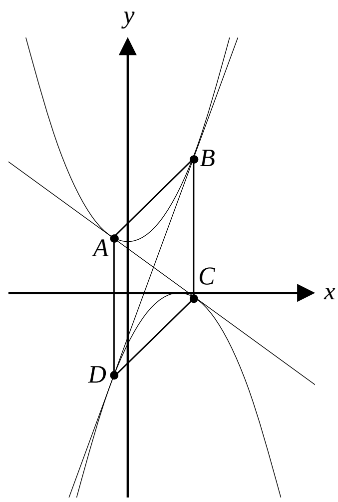
②が重解を持つには

$$D/4=(t-a)^2+t^2-a^2-\frac{1}{a^2}=2t^2-2at-\frac{1}{a^2}=0 \qquad 2a^2t^2-2a^3t-1=0 \text{ ——③}$$

③の判別式は $D/4=a^6+2a^2>0$ であるから、③は相違なる 2 実数解を持つ。

したがって、共通接線①が 2 本定まるので、題意は示された。(証明終)

(2)



③が成り立つとき、$\dfrac{1}{a^2}=2t^2-2at$ であるから、②より

$$x^2+2(t-a)x+t^2-2at+a^2=0 \qquad \{x+(t-a)\}^2=0 \qquad \therefore x=-t+a$$

したがって、③の 2 解を $\alpha,\ \beta$ としたとき、4 つの接点は

$$A\left(\alpha,\ \alpha^2+\frac{1}{a^2}\right),\ B\left(\beta,\ \beta^2+\frac{1}{a^2}\right),\ C(-\alpha+a,\ -\alpha^2),\ D(-\beta+a,\ -\beta^2)$$

とおける。$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$ より四角形 $ABCD$ は平行四辺形。

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}=\left(\alpha+\beta-a,\ \alpha^2+\beta^2+\dfrac{1}{a^2}\right)$ であり、③より $\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{2a^2}$ であるから

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2+\frac{1}{a^2} \qquad \therefore \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}=\left(0,\ a^2+\frac{2}{a^2}\right)$$

$\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{CB}$ は y 軸に平行であり、$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=a^2+\dfrac{2}{a^2}$ であるから

$$\therefore S(a)=|\beta-\alpha|\left(a^2+\frac{2}{a^2}\right)=\left(a^2+\frac{2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

相加平均・相乗平均の関係から　$a^2+\dfrac{2}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\dfrac{2}{a^2}}=2\sqrt{2}$　等号成立は　$a^2=\dfrac{2}{a^2}$　$a^4=2$　$\therefore a=\sqrt[4]{2}$

$S(a)$ は、$a=\sqrt[4]{2}$ のとき、最小値 $(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{9}{4}}=4\sqrt[4]{2}$ をとる。……(答)