1989 年東大文 $\boxed{3}$

(1)

$z=x+iy\,(y>0)$ とすると

$$f(z)=\frac{z+1-q}{z+1}=1-\frac{q}{z+1}=1-\frac{q}{(x+1)+iy}=1-\frac{q\{(x+1)-iy\}}{(x+1)^2+y^2}$$

$q>0$ より、 $f(z)$ の虚数部 $\dfrac{qy}{(x+1)^2+y^2}>0$ で、 $f(z)$ は H に属する。（証明終）

(2)

数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき、 $r_1=s_1=1$ とすれば、 $f_1(z)=\dfrac{r_1z+(1-q)s_1}{s_1z+r_1}$ 、 ${r_1}^2-(1-q){s_1}^2=q^1$ は成立。

$n=k$ のとき、 $f_k(z)=\dfrac{r_kz+(1-q)s_k}{s_kz+r_k}$ 、 ${r_k}^2-(1-q){s_k}^2=q^k$ が成り立つ実数 r_k,s_k が存在すると仮定する。

$$\begin{aligned}f_{k+1}(z)=f(f_k(z))&=\frac{\dfrac{r_kz+(1-q)s_k}{s_kz+r_k}+1-q}{\dfrac{r_kz+(1-q)s_k}{s_kz+r_k}+1}\\&=\frac{r_kz+(1-q)s_k+(1-q)(s_kz+r_k)}{r_kz+(1-q)s_k+s_kz+r_k}=\frac{\{r_k+(1-q)s_k\}z+(1-q)(s_k+r_k)}{(s_k+r_k)z+\{r_k+(1-q)s_k\}}\end{aligned}$$

したがって、 $r_{k+1}=r_k+(1-q)s_k,\ s_{k+1}=s_k+r_k$ とすれば、 $f_{k+1}(z)=\dfrac{r_{k+1}z+(1-q)s_{k+1}}{s_{k+1}z+r_{k+1}}$ が成立する。

このとき、

$$\begin{aligned}{r_{k+1}}^2-(1-q){s_{k+1}}^2&=\{r_k+(1-q)s_k\}^2-(1-q)(r_k+s_k)^2\\&={r_k}^2+2(1-q)r_ks_k+(1-q)^2{s_k}^2-(1-q)({r_k}^2+2r_ks_k+{s_k}^2)\\&=q{r_k}^2+\{(1-q)^2-(1-q)\}{s_k}^2=q\{{r_k}^2-(1-q){s_k}^2\}=q^{k+1}\end{aligned}$$

したがって、 ${r_{k+1}}^2-(1-q){s_{k+1}}^2=q^{k+1}$ も成立し、 $n=k+1$ でも仮定は成立。

以上により示された。（証明終）