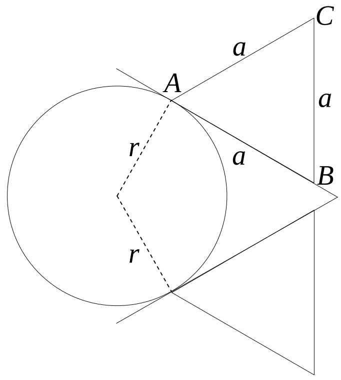
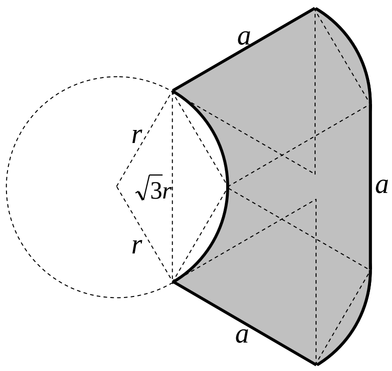
1989年東大文 $\boxed{4}$

i）　△ABCが円Oと1つの頂点を共有しているとき
例えば頂点Aを共有しているとする。
図のように、円Oに接線を引き、接点に点A、接線上に点Bをとる。
円周上に沿って点Aを動かしながら、正三角形ABCを平行移動させる。
△ABCは円Oの内部と共有点を持たず、円Oの周とただ1点を
共有することから、上方向には動かせない。
△ABC下方向に移動させ、辺ACと平行な円Oの接線と辺ACが重なると、
それ以上上下方向には動かせない。

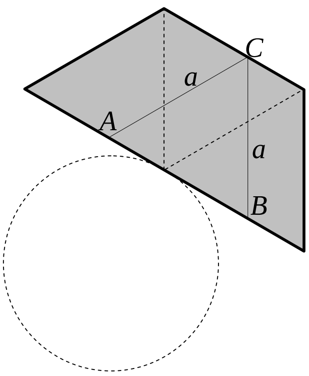


点Aが動く範囲は円周の$\dfrac{1}{3}$であり、このとき△ABCが通過する範囲は
右図の通り。
この面積は、1辺の長さがaの正三角形1個の面積と、
2辺の長さがa、rである長方形2個の面積の和に等しく、

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+2ar$$



ii）　△ABCが円Oと1辺で接しているとき
例えば辺ABで接しているとき、△ABCは辺ABの延長に沿って動く。
辺ABを動かせる長さは$2a$である。



i)、ii)を考慮すると、△ABCの通過範囲は下図の通り。
この面積は、1辺の長さがaの正三角形6個の面積と、
2辺の長さがa、rである長方形6個の面積の和に等しく、

$$\therefore S=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+6ar=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2+6ar \quad \cdots\cdots（答）$$

$T=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$であるから、

$$\frac{S}{T}=\frac{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2+6ar}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2}=6+\frac{8\sqrt{3}r}{a} \quad \therefore \lim_{r\to 0}\frac{S}{T}=6 \quad \cdots\cdots（答）$$