1989 年東大理 $\boxed{3}$

(1)

$z=x+iy\,(y>0)$ とすると

$$f(z)=\frac{z+1-q}{z+1}=1-\frac{q}{z+1}=1-\frac{q}{(x+1)+iy}=1-\frac{q\{(x+1)-iy\}}{(x+1)^2+y^2}$$

$q>0$ より、$f(z)$ の虚数部 $\dfrac{qy}{(x+1)^2+y^2}>0$ で、$f(z)$ は H に属する。(証明終)

(2)

$1-q=\alpha$ とおくと　$f_1(z)=\dfrac{z+\alpha}{z+1}$　　$f_2(z)=\dfrac{z+\alpha+\alpha(z+1)}{z+\alpha+z+1}=\dfrac{(\alpha+1)z+2\alpha}{2z+(\alpha+1)}$

$$f_3(z)=\frac{(\alpha+1)z+2\alpha+\alpha(2z+\alpha+1)}{(\alpha+1)z+2\alpha+2z+(\alpha+1)}=\frac{(3\alpha+1)z+(\alpha^2+3\alpha)}{(\alpha+3)z+(3\alpha+1)}$$

$$f_4(z)=\frac{(3\alpha+1)z+(\alpha^2+3\alpha)+\alpha\{(\alpha+3)z+(3\alpha+1)\}}{(3\alpha+1)z+(\alpha^2+3\alpha)+(\alpha+3)z+(3\alpha+1)}=\frac{(\alpha^2+6\alpha+1)z+4(\alpha^2+\alpha)}{4(\alpha+1)z+(\alpha^2+6\alpha+1)}$$

$$f_5(z)=\frac{(\alpha^2+6\alpha+1)z+4(\alpha^2+\alpha)+\alpha\{4(\alpha+1)z+(\alpha^2+6\alpha+1)\}}{(\alpha^2+6\alpha+1)z+4(\alpha^2+\alpha)+4(\alpha+1)z+(\alpha^2+6\alpha+1)}=\frac{(5\alpha^2+10\alpha+1)z+(\alpha^3+10\alpha^2+5\alpha)}{(\alpha^2+10\alpha+5)z+(5\alpha^2+10\alpha+1)}$$

ここで、$f_5(z)=z$ とすると

$$(\alpha^2+10\alpha+5)z^2+(5\alpha^2+10\alpha+1)z=(5\alpha^2+10\alpha+1)z+(\alpha^3+10\alpha^2+5\alpha)$$
$$(\alpha^2+10\alpha+5)(z^2-\alpha)=0$$

これが任意の H の元 z について成立するとき、

$$\alpha^2+10\alpha+5=0\quad \alpha=-5\pm2\sqrt{5}\quad q=6\pm2\sqrt{5}$$

いずれも $q>0$ を満たす。$f_5(z)=z$ のとき、$f_6(z)=f_1(z),\ f_7(z)=f_2(z),\ \cdots,\ f_{10}(z)=f_5(z)$ となるから、

$\therefore q=6\pm2\sqrt{5}$　……(答)

(注)

(2)は、z が H の元である場合に限らず、$y<0$ であっても $f_{10}(z)=f_5(z)$ が成立する。