1989年東大理 $\boxed{4}$

$3^{21} = 10460353203 = 10^{10} + 460353203$ より、$10^{10} < 10^{10} + 3 < 3^{21}$

$\therefore \dfrac{10^{210}}{3^{21}} < \dfrac{10^{210}}{10^{10}+3} < \dfrac{10^{210}}{10^{10}}$　$\left(\dfrac{10}{3}\right)^{21} \times 10^{189} < \dfrac{10^{210}}{10^{10}+3} < 10^{200}$　$10^{10} < 3^{21} < \left(\dfrac{10}{3}\right)^{21}$ より、

$\therefore 10^{199} < \dfrac{10^{210}}{10^{10}+3} < 10^{200}$　したがって、$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分は 200 桁 ……(答)

次に、

$$10^{210} = (10^{10})^{21} = \left\{(10^{10}+3)-3\right\}^{21} = (10^{10}+3)^{21} + {}_{21}C_1 \cdot (-3) \cdot (10^{10}+3)^{20} + \cdots + {}_{21}C_{20} \cdot (-3)^{20} \cdot (10^{10}+3) + (-3)^{21}$$ より、

m を整数として $10^{210} = (10^{10}+3)m - 3^{21}$、$10^{210} + 3^{21} = (10^{10}+3)m$ と書ける。ここで、10^{210} は 10 で割り切れて、3^{21} を 10 で割った余りは 3 であるから、$(10^{10}+3)m$ を 10 で割った余りは 3 である。

$(10^{10}+3)m$ を 10 で割った余りを調べる。$10^{10}+3$ を 10 で割った余り 3 と、m を 10 で割った余りの積について考えれば十分であり、

$3\times 0 = 0$　$3\times 1 = 3$　$3\times 2 = 6$　$3\times 3 = 9$　$3\times 4 = 10+2$　$3\times 5 = 10+5$

$3\times 6 = 10+8$　$3\times 7 = 20+1$　$3\times 8 = 20+4$　$3\times 9 = 20+7$

したがって、$(10^{10}+3)m$ を 10 で割った余りが 3 であるとき、m を 10 で割った余りは 1 しかあり得ない。
$m = 10k + 1$ とおけて、

$10^{210} = (10^{10}+3)(10k+1) - 3^{21}$　$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3} = 10k + 1 - \dfrac{3^{21}}{10^{10}+3}$

$\dfrac{3^{21}}{10^{10}+3} = \dfrac{10460353203}{10000000003} = 1 + \dfrac{460353200}{10000000003}$ より

$\therefore \dfrac{10^{210}}{10^{10}+3} = 10k - \dfrac{460353200}{10000000003}$　したがって、$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分の 1 の位は 9 ……(答)