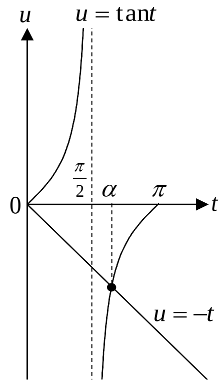
1989 年東大理 $\boxed{5}$



$g(t)=t\sin t$ の、$0\leqq t\leqq\pi$ における増減を考える。

$g'(t)=\sin t+t\cos t$ $\quad g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1>0$ $t\neq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\quad g'(t)=\cos t(\tan t+t)$

$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos t>0$ $\quad \dfrac{\pi}{2}<t\leqq\pi$ のとき $\cos t<0$

右のグラフより、$\tan t=-t$ となる t が 1 つ存在し、これを α とすると

$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2},\ \alpha<t\leqq\pi$ のとき $\quad \tan t>-t$ $\quad \dfrac{\pi}{2}<t<\alpha$ のとき $\quad \tan t<-t$

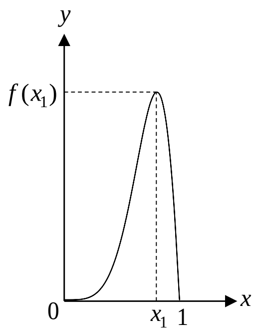
$g(t)$ の増減は右の通りで、$t=\alpha$ においてただ 1 つの極大値を持つ。

$0\leqq x\leqq 1$ において πx^2 は単調増加であるから、

$f(x)$ も $x=x_1=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}}$ においてただ 1 つの極大値を持つ。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$		↗		↘	

$y=\pi x^2\sin\pi x^2$ のグラフの、$0\leqq x\leqq x_1$ の部分を $x_1(y)$ 、$x_1\leqq x\leqq 1$ の部分を $x_2(y)$ とすると



$$V=\pi\int_0^{f(x_1)}{x_2}^2dy-\pi\int_0^{f(x_1)}{x_1}^2dy=\pi\int_1^{x_1}{x_2}^2\left(\frac{dy}{dx_2}\right)dx_2-\pi\int_0^{x_1}{x_1}^2\left(\frac{dy}{dx_1}\right)dx_1$$

$$=\pi\int_1^{x_1}x^2f'(x)dx-\pi\int_0^{x_1}x^2f'(x)dx=\pi\int_1^0x^2f'(x)dx$$

$$=\pi\Big[x^2f(x)\Big]_1^0-\pi\int_1^0(x^2)'f(x)dx=2\pi\int_0^1xf(x)dx$$

したがって、$V=2\pi\displaystyle\int_0^1xf(x)dx$ が示された。(証明終)

$V=2\pi^2\displaystyle\int_0^1x^3\sin\pi x^2dx$ であり、$t=\pi x^2$ とおくと $\quad dt=2\pi xdx$

$$V=2\pi^2\int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}\cdot\sin t\cdot\frac{dt}{2\pi}=\int_0^{\pi}t\sin tdt=\Big[t(-\cos t)\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos tdt=\pi+\Big[\sin t\Big]_0^{\pi}=\pi\quad\cdots\cdots(答)$$