1990 年東大文 $\boxed{2}$

(1)

$$(2\alpha^2+5\alpha-1)^2=4\alpha^4+25\alpha^2+1+20\alpha^3-10\alpha-4\alpha^2=4\alpha^4+20\alpha^3+21\alpha^2-10\alpha+1$$

$$=(\alpha^3+3\alpha^2-1)(4\alpha+8)-3\alpha^2-6\alpha+9$$

$\alpha^3+3\alpha^2-1=0$ より　$\therefore (2\alpha^2+5\alpha-1)^2=-3\alpha^2-6\alpha+9$ ……(答)

(2)

$x^3+3x^2-1=0$ の α 以外の 2 解を $\beta,\ \gamma$ とすると、解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-3 & \text{——①}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0 & \text{——②}\\ \alpha\beta\gamma=1 & \text{——③}\end{cases}$$

①より　$\beta+\gamma=-\alpha-3$ ——④　②より　$\beta\gamma=-\alpha(\beta+\gamma)=\alpha^2+3\alpha$ ——⑤

なお、③に代入すると、$\alpha\beta\gamma=\alpha^3+3\alpha^2=1$ は成立。

④、⑤より、$\beta,\ \gamma$ は 2 次方程式 $y^2+(\alpha+3)y+\alpha^2+3\alpha=0$ の 2 解であるから

$$y=\frac{-(\alpha+3)\pm\sqrt{(\alpha+3)^2-4(\alpha^2+3\alpha)}}{2}=\frac{-(\alpha+3)\pm\sqrt{-3\alpha^2-6\alpha+9}}{2}$$

(1) より、$-3\alpha^2-6\alpha+9=(2\alpha^2+5\alpha-1)^2$ であるから　$\therefore y=\dfrac{-(\alpha+3)\pm\left|2\alpha^2+5\alpha-1\right|}{2}$

結局、$y=\dfrac{-(\alpha+3)\pm(2\alpha^2+5\alpha-1)}{2}$ であり、

$$y=\frac{2\alpha^2+4\alpha-4}{2},\ \frac{-2\alpha^2-6\alpha-2}{2}\qquad \therefore y=\alpha^2+2\alpha-2,\ -\alpha^2-3\alpha-1$$

α 以外の 2 解は　$\alpha^2+2\alpha-2,\ -\alpha^2-3\alpha-1$ ……(答)

(注)

$f(x)=x^3+3x^2-1$ とすると、$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

増減は右の通りで、$x=-2$ のとき極大、$x=0$ のとき極小。

$f(-2)=3,\ f(0)=-1$ であるから、

$f(x)=0$ は相違なる 3 つの実数解を持つ。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$