1990年東大文 $\boxed{3}$

$f(x)=x^4+ax^3+bx+c \qquad f'(x)=4x^3+3ax^2+b \qquad f''(x)=12x^2+6ax=6x(2x+a)$

$f(x)=0$ が4個の相違なる実数解を持ち、$f'(x)=0$ が3個の相違なる実数解 $p,\ q,\ r$ を持つ。

$f'(x)$ の増減を考える。$p<0<q<1<r<2$ より、

$f'(x)$ は $x=0$ で極大、$x=-\dfrac{a}{2}$ で極小となる。すなわち、$a<0$。

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $-\dfrac{a}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |
| $f'(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

$f'(0)=b>0,\ f'\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{1}{4}a^3+b<0$ より　$0<b<-\dfrac{1}{4}a^3$ ――①

$-\dfrac{a}{2}<r<2$ より $-4<a$ であるから　$-4<a<0$　$\therefore a=-3,\ -2,\ -1$

$a=-1$ のとき　①より $0<b<\dfrac{1}{4}$ であるが、これを満たす整数 $b$ は存在しない。

$a=-2$ のとき　①より $0<b<2$　$\therefore b=1$

$f'(x)=4x^3-6x^2+1=(2x-1)(2x^2-2x-1)$

$f'(x)=0$ を解くと　$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\therefore p=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ q=\dfrac{1}{2},\ r=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

| $x$ | $\cdots$ | $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | － | 0 | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ |

$f(x)=x^4-2x^3+x+c$ の増減は右の通り。

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき極大値 $c+\dfrac{5}{16}$ をとり、$f(x)=\left(x^2-x-\dfrac{1}{2}\right)^2+c-\dfrac{1}{4}$ より $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ のとき極小値 $c-\dfrac{1}{4}$ をとる。

$f(x)=0$ が4個の相違なる実数解を持つので　$c-\dfrac{1}{4}<0<c+\dfrac{5}{16}$　$-\dfrac{5}{16}<c<\dfrac{1}{4}$　$\therefore c=0$

$a=-3$ のとき

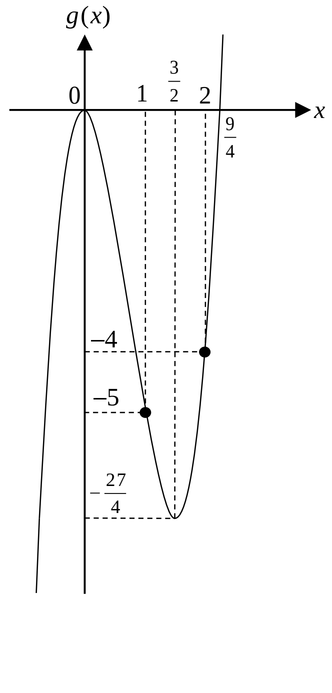
$f'(x)=0$ とすると　$f'(x)=4x^3-9x^2+b=0$　$4x^3-9x^2=-b$

$g(x)=4x^3-9x^2$ とすると、$g(x)$ は $x=0$ で極大、$x=\dfrac{3}{2}$ で極小となる。

グラフは右図の通り。$g(1)=-5,\ g(2)=-4$ であるから、

$p<0<q<1<r<2$ であるためには、$-5<-b<-4$、

すなわち $4<b<5$ となる必要があるが、これを満たす整数 $b$ は存在しない。




以上により　$\therefore a=-2,\ b=1,\ c=0,\ p=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ q=\dfrac{1}{2},\ r=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　……(答)