1990 年東大理後期 $\boxed{1}$

Q の面積を 1 と 3 に切り分けるような直線 l の存在範囲を考える。

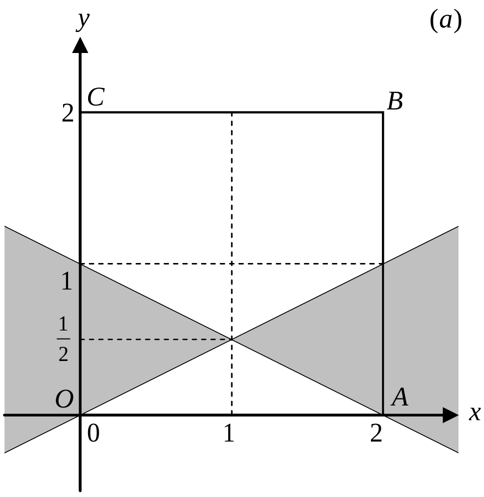
i） l が Q の対向する 2 辺を通るとき（頂点を通る場合も含む）

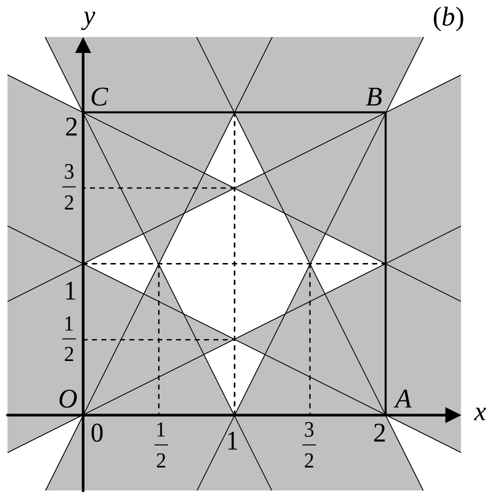
直線 $y=\dfrac{1}{2}$ は Q の面積を 1 と 3 に切り分ける。

点 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ を中心に、傾きを $-\dfrac{1}{2}$ から $\dfrac{1}{2}$ まで振っても、Q の面積は 1 と 3 に切り分けられる。

このときの直線 l の存在範囲は、図（a）の通り。

対称性より、図（a）の領域を点 $(1,1)$ を中心に $90°$ ずつ回転させ、重ねた共通範囲が i）の場合の l の存在範囲であり、図（b）の通り。境界線を含む。





ii） l が Q の隣接する 2 辺を通るとき（頂点を通る場合も含む）

辺 OA, OC と交差する場合を考える。OA との交点を $S(a,0)$ とすると、OC との交点 T は、

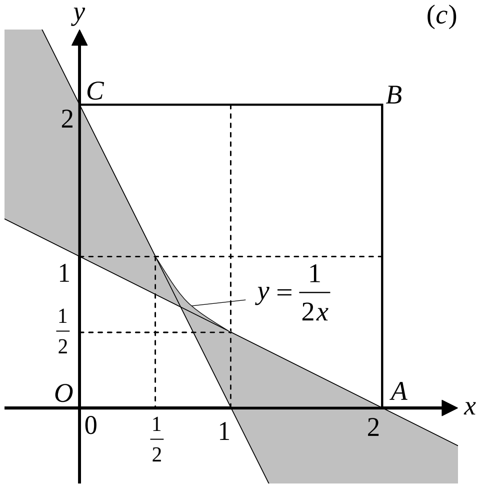
$\triangle OPQ$ の面積が 1 より $T\left(0,\dfrac{2}{a}\right)$ となる。$a \leqq 2, \dfrac{2}{a} \leqq 2$ より　$\therefore 1 \leqq a \leqq 2$

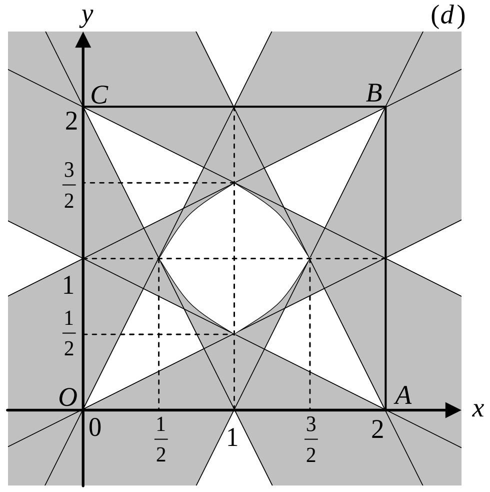
S, T を通る直線の方程式は　$y=\dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{a^2}x=-\dfrac{2}{a^2}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)+\dfrac{1}{a}$

これは曲線 $y=\dfrac{1}{2x}$ 上の点 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{1}{a}\right)$ における接線である。

a を 1 から 2 まで動かすと、l の存在範囲は図（c）の通り。

対称性より、図（c）の領域を点 $(1,1)$ を中心に $90°$ ずつ回転させ、重ねた共通範囲が ii）の場合の l の存在範囲であり、図（d）の通り。境界線を含む。





l の存在範囲は図(b)または図(d)であるから、図(e)の通り。 P の存在範囲は図(e)に含まれない領域であるから、図(f)の通り。境界線を含まない。対称性より、 P の存在範囲の面積は

$$4\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x}\,dx\right)=2-2\Big[\log x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}=2-2\log 2$$ ……(答)