1990 年東大理後期 $\boxed{2}$

(1)

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\text{より}\quad A^i=\begin{pmatrix}\cos\frac{i\pi}{3} & -\sin\frac{i\pi}{3}\\ \sin\frac{i\pi}{3} & \cos\frac{i\pi}{3}\end{pmatrix}\quad i=1,\cdots,6$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{a_1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}a_2\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\ 0\end{pmatrix}=\frac{a_2}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_3\\ y_3\end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix}a_3\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_3\\ 0\end{pmatrix}=a_3\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}x_4\\ y_4\end{pmatrix}=A^4\begin{pmatrix}a_4\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_4\\ 0\end{pmatrix}=\frac{a_4}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_5\\ y_5\end{pmatrix}=A^5\begin{pmatrix}a_5\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_5\\ 0\end{pmatrix}=\frac{a_5}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}x_6\\ y_6\end{pmatrix}=A^6\begin{pmatrix}a_6\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_6\\ 0\end{pmatrix}=a_6\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$P_i\ (i=1,\cdots,6)$ の座標は $\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{i}x_k\\ \sum_{k=1}^{i}y_k\end{pmatrix}$ で与えられ、$P_6=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a_1-a_2-2a_3-a_4+a_5+2a_6\\ \sqrt{3}(a_1+a_2-a_4-a_5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ より

$$\begin{cases}a_1-a_2-2a_3-a_4+a_5+2a_6=0 & \text{——①}\\ a_1+a_2-a_4-a_5=0 & \text{——②}\end{cases}$$

②より　$\therefore a_1-a_4=a_5-a_2$　①＋②より　$2a_1-2a_3-2a_4+2a_6=0$　$\therefore a_1-a_4=a_3-a_6$

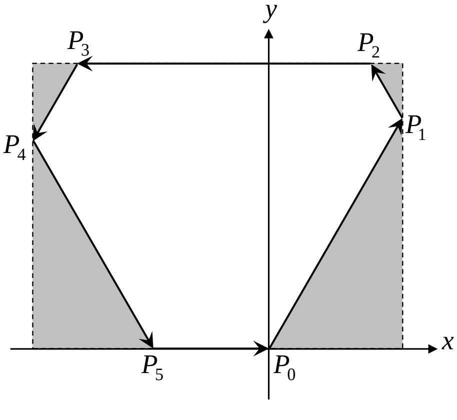
したがって　$\therefore a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$　(証明終)

(2)

$a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6=1$ より　$a_1=a_4+1,\ a_5=a_2+1,\ a_3=a_6+1$ ——①

$\sum_{i=1}^{6}a_i=6$ より、①を代入して　$\sum_{i=1}^{6}a_i=2(a_2+a_4+a_6)+3=6$　$\therefore a_2+a_4+a_6=\frac{3}{2}$ ——②

$\left|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\right|=a_i\ (i=1,\cdots,6)$ であるから、




右図の破線で示される長方形の面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(a_1+a_2)\times\left(\frac{a_2}{2}+a_3+\frac{a_4}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}(a_1+a_2)(a_2+2a_3+a_4)$$

右図の網掛部の総面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}({a_1}^2+{a_2}^2+{a_4}^2+{a_5}^2)=\frac{\sqrt{3}}{8}({a_1}^2+{a_2}^2+{a_4}^2+{a_5}^2)$$

これより、$H$ の面積は

$$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a_1+a_2)(a_2+2a_3+a_4)-\frac{\sqrt{3}}{8}({a_1}^2+{a_2}^2+{a_4}^2+{a_5}^2)\ \text{——③}$$

③に①、②を代入して整理すると

$$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a_4+1+a_2)(a_2+2a_6+2+a_4)-\frac{\sqrt{3}}{8}(a_4{}^2+2a_4+1+a_2{}^2+a_4{}^2+a_2{}^2+2a_2+1)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a_2+a_4+1)(5-a_2-a_4)-\frac{\sqrt{3}}{4}(a_2{}^2+a_4{}^2+a_2+a_4+1)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(5+4a_2+4a_4-a_2{}^2-2a_2a_4-a_4{}^2-a_2{}^2-a_4{}^2-a_2-a_4-1)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(-2a_2{}^2-2a_4{}^2+3a_2+3a_4-2a_2a_4+4)$$

ここで、$a_2+a_4=k$ とおくと、$0<a_2<k$、$0<k<\frac{3}{2}$ で、$a_4=k-a_2$ を代入すると

$$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2a_2{}^2-2(k-a_2)^2+3k-2a_2(k-a_2)+4\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(-2a_2{}^2+2ka_2-2k^2+3k+4)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2(a_2{}^2-ka_2)-2k^2+3k+4\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2\left(a_2-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{3}{2}k^2+3k+4\right\}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2\left(a_2-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{3}{2}(k^2-2k)+4\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2\left(a_2-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{3}{2}(k-1)^2+\frac{11}{2}\right\}$$

$a_2=\frac{k}{2}$ は $0<a_2<k$ を満たし、$k=1$ は $0<k<\frac{3}{2}$ を満たすので、

$S$ は、$a_2=\frac{k}{2}$ かつ $k=1$、$a_2=a_4=a_6=\frac{1}{2}$ のとき、最大値 $\frac{11}{8}\sqrt{3}$ をとる。……(答)

(3)

$a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6=l$ とおくと　$a_1=a_4+l,\ a_5=a_2+l,\ a_3=a_6+l$ ――①

$\sum_{i=1}^{6}a_i=6$ より、①を代入して　$\sum_{i=1}^{6}a_i=2(a_2+a_4+a_6)+3l=6$　$\therefore a_2+a_4+a_6=3-\frac{3}{2}l$ ――②

$0<a_2+a_4+a_6<6$ より　$0<3-\frac{3}{2}l<6$　$-3<\frac{3}{2}l<3$　$\therefore -2<l<2$

$-2<l<2$ の範囲で、$l$ を固定して考える。(2)の③式に①、②を代入して整理すると

$$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a_4+l+a_2)(a_2+2a_6+2l+a_4)-\frac{\sqrt{3}}{8}(a_4{}^2+2la_4+l^2+a_2{}^2+a_4{}^2+a_2{}^2+2la_2+l^2)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a_2+a_4+l)(6-l-a_2-a_4)-\frac{\sqrt{3}}{4}(a_2{}^2+a_4{}^2+la_2+la_4+l^2)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{l(6-l)+(6-2l)(a_2+a_4)-a_2{}^2-2a_2a_4-a_4{}^2-a_2{}^2-a_4{}^2-la_2-la_4-l^2\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2a_2{}^2-2a_4{}^2+(6-3l)(a_2+a_4)-2a_2a_4+(6l-2l^2)\right\}$$

ここで、$a_2+a_4=k$ とおくと、$0<a_2<k$、$0<k<3-\frac{3}{2}l$ で、$a_4=k-a_2$ を代入すると

$$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2{a_2}^2-2(k-a_2)^2+(6-3l)k-2a_2(k-a_2)+(6l-2l^2)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2{a_2}^2+2ka_2-2k^2+3(2-l)k+(6l-2l^2)\right\}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2({a_2}^2-ka_2)-2k^2+3(2-l)k+(6l-2l^2)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{-2\left(a_2-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{3}{2}k^2+3(2-l)k+(6l-2l^2)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-2\left(a_2-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left\{k^2-2(2-l)k\right\}+(6l-2l^2)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-2\left(a_2-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left\{k-(2-l)\right\}^2+\frac{3}{2}(2-l)^2+(6l-2l^2)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-2\left(a_2-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left\{k-(2-l)\right\}^2+6-\frac{1}{2}l^2\right]$$

$a_2=\dfrac{k}{2}$ は $0<a_2<k$ を満たす。$-2<l<2$ において $2-l>0$ であり、

$\left(3-\dfrac{3}{2}l\right)-(2-l)=1-\dfrac{1}{2}l>0$ より、$k=2-l$ は $0<k<3-\dfrac{3}{2}l$ を満たす。

$S$ は、$a_2=\dfrac{k}{2}$ かつ $k=2-l$ 、$a_2=a_4=a_6=1-\dfrac{1}{2}l$ のとき、最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(6-\dfrac{1}{2}l^2\right)$ をとる。

$-2<l<2$ の範囲で $l$ を動かしたとき、$l=0$ のとき最大になるのは明らかであるから、

$S$ は、$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=1$ のとき、最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。……(答)